昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2010年11月1日発行　第48巻11号　毎月1回1日発行
ISSN 0386—2240

数理科学

11
2010

特集 連続から離散へ
なぜ離散的な考え方か



No.569

サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 569 November 2010

連続から離散へ

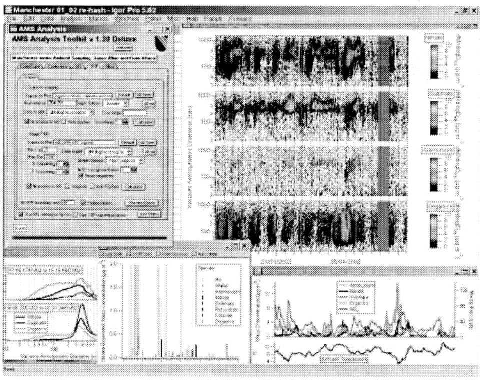
なぜ離散的な考え方か

表紙：戸川　隼人

■広告企画■

科学技術計算・ビジュアリゼーションソフト最前線

グラフ作成・解析環境の統合ソフトウエア
IGOR Pro（イゴール・プロ）英語版／日本語版



IGOR Proは、グラフ作成、データ解析、プログラミングツールをひとつに統合した科学者やエンジニアのための拡張性の高いパワフルなツールです。

・出版品質のグラフィックを作成できます。EPS等、高解像度の画像形式で出力することもできます。

・テキスト、標準バイナリ、Excel、JCAMP、MatLabデータなど、幅広い種類の形式のデータファイルをインポートできます。

・任意の数のグラフやテーブルを任意の幅で複数同時に表示できます。また、10万ポイントを超える大規模なデータでも高速に処理できます。文字列データ、内部 8 形式の数値データ、および4次元までのデータに対応しています。

・グラフ機能においては、各曲線はそれぞれ独自の色、太さ、スタイルに設定できます。曲線上にある各ポイントの線の色、マーカーのサイズや形状は、他のデータの値を利用することもできます。グラフの中に表示できる曲線、軸、注釈、等高線、写真、画像の数に制限はありません。

・フーリエ、ウェーブレット、Hough変換。無制限の独立変数を伴う組み込み関数又はユーザー定義関数への線形/非線形回帰曲線、微分、積分、常微分方程式、重畳（コンボリューション）、ヒストグラム、スムージング、数学的表現による評価、多くの LAPACKルーチンを利用した行列演算、信号測定、疎データまたは行列データの等高線化、偽カラー表示、などの解析機能を持っています。

・動作環境：Windows/MacOSX

■問い合わせ先■

株式会社ヒューリンクス

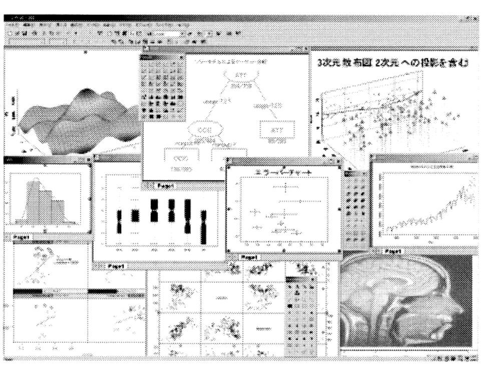
〒103-0015 東京都中央区日本橋箱崎町5-14

TEL03-5642-83805　FAX03-5642-8381

E-mail:soft.sales@hulinks.co.jp

URL:http://www.hulinks.co.jp/

汎用データ解析ソフトウエア
S－PLUS



Ｓ－ＰＬＵＳは高度で最新の解析手法と豊富なグラフィックスを備え、さまざまな分野で利用できる汎用のデータ解析ソフトウエアです。データの整理、加工、抽出から各種の解析、グラフ出力まで研究開発を一貫して支援いたします。世界中の数多くの研究開発機関、あるいは教育機関での導入実績を誇ります。

・4000 種類以上の高度で最新の解析手法を標準で備えています。（基本演算、行列演算、線形代数、シミュレーション、多変量解析、回帰分析、分散分析、線形モデル、医薬生物統計、検定、時系列解析、ＯＲ、ニューラルネット他）

・３Ｄプロットを含む高品質で多種のグラフィックスを備え、グラフのカスタマイズも自由自在です。

・米国ベル研究所で開発されたオブジェクト指向データ解析言語「Ｓ」を備え、解析手法のカスタマイズや新規開発、プログラミングが手軽に行えます。

・ＯＬＥやＯＤＢＣといったインターフェースを備え、他ソフトウエアとの連携動作可能な上、入出力も様々なアプリケーション、画像フォーマットに対応します。

・これらの機能を WWW 経由で利用可能にするサーバソフトウエア StatServer もございます。

・常設のトレーニングコース、強力なサポートで研究を側面支援いたします。

・Windows、Linux、主要 UNIX に対応しています。

■問い合わせ先■

株式会社数理システム

〒160-0022 東京都新宿区新宿 2-4-3
フォーシーズンビル 10F

TEL03-3358-6681　FAX03-3358-1727

E-mail:splus-info@msi.co.jp

URL:http://www.msi.co.jp/splus/

November 2010 MATHEMATICAL SCIENCES Number 569

特集／連続から離散へ

はじめに

薩摩 順吉

世界は連続か離散か．本特集はそうした根元的とも言える問いかけに答えようとするものではない．世の中の現象を解析するのに連続的な見方が良いのか，それとも離散的な見方が良いのかについて考える材料を提供しようというものである．

これまで何百年にわたって連続的な見方，すなわち微分方程式を用いて現象を解析するのが研究の主流であった．ニュートンは，運動法則のうち運動方程式を微分方程式で表し，その解を求めるという手法を提案した．微分方程式に初期条件を与えて積分するという手段が自然科学における一つの決定的な方法になったのである．近代解析学，近代物理学ともにニュートンに始まるといってよいほど，歴史的に重要な一歩であった．

物理学においては，力学，連続体，電磁気と対象は拡がっても研究手段は微積分であった．20世紀になって登場した相対性理論も時空は連続であるという仮定の下に展開されてきた．量子力学は連続的な手法と離散的な手法がともに用いられた研究対象であるが，やはり連続的な取扱いが中心であったと言えよう．

ところで，ニュートンが運動の理論を展開するために導入した極限の考えは必須のものであっただろうか．すなわち，変位の時間変化である平均速度，平均速度の時間変化である平均加速度に対して時間間隔 $\to 0$ の極限として得られる瞬間速度，瞬間加速度は本当に必要なものであっただろうか．

決してそうではない．平均速度，平均加速度を考えても理論は展開できる．その場合，運動方程式は微分方程式でなく，差分方程式で書かれることになる．その方程式の解は，原理的に，求めることが可能である．得られた解で時間間隔 $\to 0$ の極限をとると，当然のことながら対応する微分方程式の解に一致する．しかし，問題は差分方程式の解を求めるのが極めて面倒であるということである．

現象をよく記述し，できるだけ広いクラスの解を得るためには，差分方程式，すなわち離散系が最も優れていると，筆者は主張したい．微分方程式，すなわち連続系はあくまで差分方程式の近似であり，解のいくつかを失う可能性がある．それでは，なぜ離散系を直接扱わないのか．すぐ上で述べたように，計算は極めて面倒であり，かつ見通しが悪いものになるからである．そのため，ニュートンが導入した微分方程式が，ずっと研究対象の中心に位置していたのである．

コンピュータの実用化は，こうした状況に大きな変化をもたらした．人力が及ばない大規模な計算が簡単に行えるようになったのである．そこで発見されたのがカオス，フラクタル，ソリトンといった数理物理学上の重要な概念である．すべて

コンピュータ上での計算をもとにして誕生した．筆者が主な研究対象としてきた無限次元非線形可積分系理論の始まりは，非線形偏微分方程式のコンピュータによる数値計算にある．ソリトンと名付けられた安定な非線形パルスがコンピュータ上で発見された．その後，そうした解の存在は方程式のもつ高い対称性に帰因することが示され，方程式はソリトン方程式と名付けられる．同様の性質をもつ非線形偏微分方程式群の存在も明らかになった．さらにその後の研究の中で，非線形偏微分方程式群の背後に母方程式といってもよい差分方程式があることが分かった．母方程式は連続近似で様々なソリトン方程式を生み出す．すなわち離散系が連続系のもとになっているのである．

カオスの発見もコンピュータ上の数値計算による．生物の増殖過程の連続モデルであるロジスティック方程式を差分化し，コンピュータ上で解を求めた結果として，“カオス”の概念が提出された．カオス的な解は連続系のロジスティック方程式そのものでは決して得られない．差分方程式を考えて初めて現れるものである．

ここで挙げた2つの例はこれまでの主流であった連続的な取扱いの他に，離散的な取扱いが重要であることを示している．同時にコンピュータの持つ大きな計算力がそうした方向の研究を可能にしたと言ってもよい．

本特集ではこうした状況を踏まえ，様々な数理分野において，これまであまり意識されてこなかった離散的な取扱いがどういう結果をもたらしたかについて，最新の結果も含めて解説していただくことにした．

連続系は離散系の一つの近似と述べたが，最近提案されたもう一つの近似“超離散系”が現象理解に役立つ可能性のあることが分かり，その内容についても簡単な説明を行う．連続，離散，超離散，解析手段の多様化が，今後の現象解明に役立つことを強く期待したい．

（さつま・じゅんきち，青山学院大学理工学部）

離散正則関数

吉田　正章

1. 初めに

私は離散正則関数というようなものが果たして存在するのか疑問に思っている．ましてや私はそのようなものの専門家ではない．にも拘らず，以下それに関することを述べてみようと思う．

2. 関数論

私の経験（特に大学院の修士の入学試験の面接）では，多くの学生は学部で習う関数論が好きである．比較的簡単で綺麗だからであろう；私も学生のときにそう感じた一人である．複素解析的関数に関する理論を単に関数論と言うのも，学部初年級までに習う関数はほとんど複素解析的だからであろう．

この関数論であるが，皆さん気が付いているかどうか知らないが，奇妙なことがある．函数論には2種類あるようなのである：所謂一般函数論と特殊函数論である．教科書でも竹内端三先生の『関数論上下』（大正15年発行）の上は一般で下が特殊となっている．掛谷宗一先生は「函数論に就て一般及特殊の両巻を著述する希望を以って…」昭和5年に「漸く其一般の方だけを完成」されたという具合である．

関数論以外では「一般代数学」と「特殊代数学」とか「一般幾何学」と「特殊幾何学」とか言っている分野はないのである．

昭和も中頃になると一般函数論と特殊函数論の教科書は同一人物によって書かれることが少なくなった．例えば犬井鉄郎先生の『特殊函数』（昭和37年発行）．

一般関数論が，（全平面で正則とか，円盤で正則とか，色々の条件は付けるけどとても特定できないくらいたくさんある）解析関数にどんなことが言えるかを論じるのに対して，特殊関数論ではある特定の関数がどうのこうのと論じるのである．

3. 離散正則関数の定義

正則関数は複素平面内（のある領域）で定義された複素数値関数であるのに対して，複素平面上のばらばらの点で定義された複素数値関数がどういう「いい性質」を持つとき「正則」と言うべきかと言うわけだが，そんな質問の答えが一つのはずはないし，答えがあるとも限らないだろう．正則関数の定義若しくは特徴付け若しくは性質を思いつくままに並べてみよう：

1. 関数が定義されている点にどの方向から近付いても微分係数は同じ（複素微分可能）．
2. Cauchy–Riemann の偏微分方程式を満たす．
3. 関数が定義されている点を中心に冪級数展開できる．
4. 一致の定理が成り立つ
5. Cauchy の積分定理・公式が成り立つ．

6. Riemann の写像定理が成り立つ．
7. 正則関数は微分しても正則関数．
8. 2 つの正則関数を足しても掛けても正則関数．
9. 逆関数があれば，それも正則関数，合成（できれば）しても正則関数．

以上，学部の学生なら誰でも知っていそうなものを並べたが，それ以外でも，何でもいいのである．このうちのどれか好きなもの（複数でも可）があれば，それの類似が成り立つような離散化の定義はないかと考えるのである．必ずしも必要というわけでないかもしれないが，定義に使うばらばらの点が段々密集してくれば，（普通のというか連続な）正則関数に近付けばもっとよかろう．そんなものがあるかないかは一般には全く分からないが，もし何か思いつけば大したものである．

4. 円敷詰め

Riemann の写像定理とは，複素平面内の単連結領域で平面全体でないものは単位円盤内部と双正則同値（等角同値とも言う）であるというものである．これは一般関数論の一番の大定理である．この難しい定理の離散版を初めて定式化し証明したのは Koebe[1] ということになっている．正則関数のある定義とかある基本性質を何とか離散化して，それの満たす性質を調べるのでなく，いきなり大定理を目指すところがすごいと思う．

さて，彼の離散正則関数の定義には円敷詰めというものを使う．複素平面上に，円盤がたくさんあり，それらは重なり合わず，すべての隙間が（円弧）三角形になっているものを**円敷詰め**と言う．例えば図 1．円で，周りがびっしりと，接する円に囲まれていないものを**境界円**と言う．円の中心の全体を考え，2 つの円が接しているときに，その 2 円の中心を結ぶことにすると，グラフができる；それは平面のある**領域**の**三角形分割**を与えている．ある円敷詰めからある円敷詰めへの向きを保つ写像（円に円を対応させる）が，円の接している状態を保つとき，**離散正則関数**と言う．この定義では，3 節の正則関数の性質のうち，ほとんどは離散的類似は想像もできないが，9 番目は定義から自然に成り立つ；さらに 6 番目が成り立つのが自慢である．

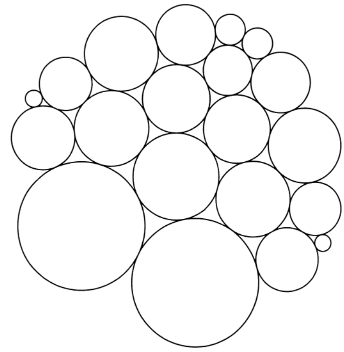


図 1　円敷詰め．

以下が Koebe による**離散的 Riemann の写像定理**である：

「有限個の円盤からなる円敷詰めが与えられ，それの決める領域が単連結なら，それと離散双正則同値な円敷詰めが単位円盤内に存在し，すべての境界円が単位円に接しているものが本質的に一意に存在する．ここで「本質的に」とは単位円の自己同型（一次分数変換）を除いてという意味である．領域が先に与えられ，円敷詰めを段々細かくしていけば（円円対応が遂に点点対応になり），離散的写像関数は（適当な正規化をしておけば）連続な場合の写像関数に収束する．」

例えば，正三角形を単位円盤に等角に写す写像関数は図 2, 3 のように円敷詰めで近似されて行く．これらの図は CirclePack[3] というソフトで描いた．

これの発展・応用は山のようにあるようである[2]．この定理は存在定理であり，所謂一般関数論に属すると思われる．しかし，特殊な図形を考えることにより，より具体的な結果も得られよう．円敷詰め式の離散正則関数は，正則関数が持つ幾何的側面を取り出して離散化したもので，この流儀で，特殊関数とは何であるべきのか，そう呼べるものが果たして存在するのか，私には未だ分からない．

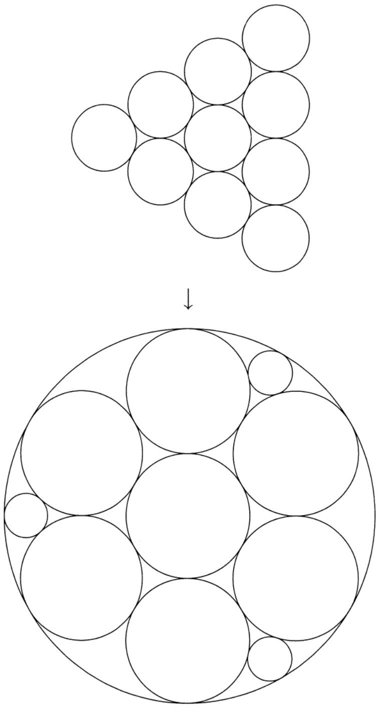


図 2　離散的 Riemann の写像定理 1.

特殊関数とは，式で書かれていて，それを含む色々の等式が成立するものと考えると，甚だ存在し難いように見える．

5. 離散特殊関数

平面上の無規則のばらばらの点で定義されているのでは，計算もしにくかろう；というわけで，複素平面 $\mathbf{C}$ 内の正方格子

$$\mathbf{Z}+\mathbf{iZ}\subset\mathbf{C},\quad \mathbf{Z}: 整数全体$$

（の一部）で定義されている関数 f を考える；

$$f_{n,m}=f(n+im)$$

と置く．これがどういうときに正則というべきか．

その前に，4 つの複素数に対して定義される複比（cross ratio）を定義しておこう：

$$cr(z_1,z_2,z_3,z_4)=\frac{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}{(z_2-z_3)(z_4-z_1)}.$$

この値は，4 点を一斉に同じ一次変換で動かしても変らない．3 点 (z_1,z_2,z_3) を $(\infty,1,0)$ に移し

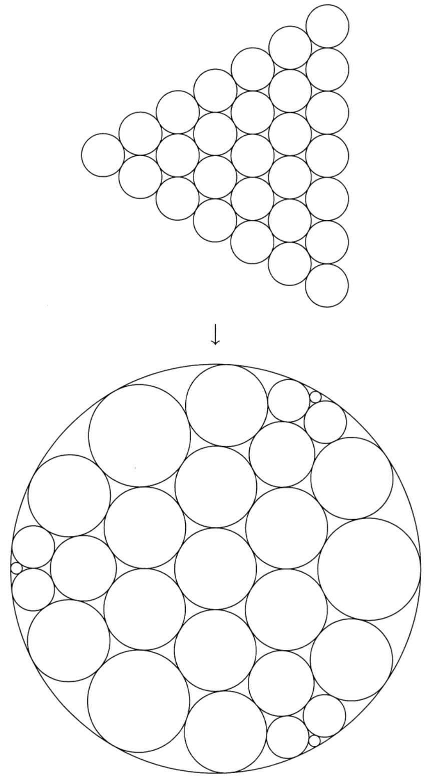


図 3　離散的 Riemann の写像定理 2.

たときの z_4 の値である．上の定義で 4 点の順番は文献によって異なる．

さて，誰が言い出したか知らないが，単位正方形の頂点での値が

$$cr(f_{n,m},f_{n+1,m},f_{n+1,m+1},f_{n,m+1})=-1$$

を満たすとき，**離散正則関数**と定義する．よく書いてある，定義の動機は，f が連続な正則関数のときに

$$\lim_{\varepsilon\to 0} cr(f_{00},f_{\varepsilon 0},f_{\varepsilon\varepsilon},f_{0\varepsilon})=-1$$

（但し $f_{00}=f(x+iy), f_{\varepsilon 0}=f(x+\varepsilon+iy),\ldots$）となるから，というものであるがあまり説得力があるとも思えない．3 節で列挙した正則関数の性質のうち，1 と 2 の離散版を満たすような定義であるが，その他はどれも満たさない，即ち，冪級数展開も考えられないし，Cauchy の積分定理・公式に当たるものもないし….

兎も角，こう定義すると，例えば第一象限

$$\mathbf{Z}_{\geq 0} + \mathbf{i}\mathbf{Z}_{\geq 0}$$

で定義された正則関数を作ろうと思えば，境界

$$\mathbf{Z}_{\geq 0} \cup \mathbf{i}\mathbf{Z}_{\geq 0}$$

で勝手な複素数を与えれば，各単位正方形の 4 頂点における値の複比が -1 になるように，順番に内部の点での行き先が一意に決まり，離散正則関数がいくらでもできる．これは，連続な場合に，冪級数の係数を勝手に与えれば，（収束さえすれば）いくらでも正則関数ができるというのと同じで，何も言っていないのと同じである．こんなことでは，特殊関数はできないのである．特殊関数とは特別に素晴らしい関数に与えられる称号なのであるから．

この流儀での特殊関数はどのくらい知られているかというと，驚くことに，指数関数と冪関数（の離散類似）だけらしい．指数関数のほうは

$$\exp(n + im)$$

を少し加工したもので，P. Doyle の名を冠して呼ばれている（参考文献 2) 参照）．冪関数のほうは，最近の私の仕事に関係しそれなりに愛着があるので，それを以下の節で説明する．

この流儀の正則関数は提唱されてから 10 年以上経つのに，例が上の 2 つ以外にほとんど知られてないということは，あまり筋がよくないのかもしれない．連続の場合は，冪関数の自然な一般化の一つに超幾何関数があるが，これの離散版等想像もできない状態である．私も，超幾何関数とまでは行かなくても，2 つの冪関数の積とか，何か別の例ができないかと数年考えてみたけれども，取り付く島も見つからなかった．何しろ 2 つの正則関数の和も積も（一般には）正則にならないし，微分したら正則でなくなるし，合成もできないですからね．

6. 離散冪関数

何で冪関数なのかはさておく．連続の場合の冪関数は指数関数とその逆関数である対数関数を用いて定義するのが普通であり，指数関数の離散化は成功裡に存在しているが，この流儀の正則関数は，逆関数が定義されないし，合成もできないので，連続のときの真似はできない．冪指数を γ として，境界 $\mathbf{Z}_{\geq 0} \cup \mathbf{i}\mathbf{Z}_{\geq 0}$ でそれぞれ

$$n^{\gamma}, \quad (im)^{\gamma}$$

を与え，内部の点では単位正方形で複比 $= -1$ を次々に解いていって，第一象限の格子点の行き先を決めると，境界から一つ中に入ったくらいはいいが，それ以上中に入ると，連続のときの冪関数が持っている「扇の開閉」という綺麗な性質（図 4）を持たず，皺くちゃになってしまう（図 5）．

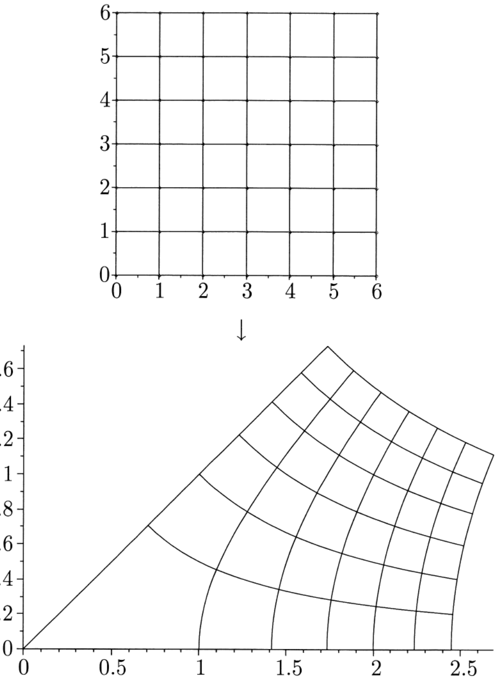


図 4　連続的冪関数.

そこで境界値を連続の冪関数の値を使うのでなく，差分方程式

$$\gamma f_{n,m} = 2n\frac{(f_{n+1,m} - f_{n,m})(f_{n,m} - f_{n-1,m})}{f_{n+1,m} - f_{n-1,m}} + 2m\frac{(f_{n,m+1} - f_{n,m})(f_{n,m} - f_{n,m-1})}{f_{n,m+1} - f_{n,m-1}}$$

を初期条件

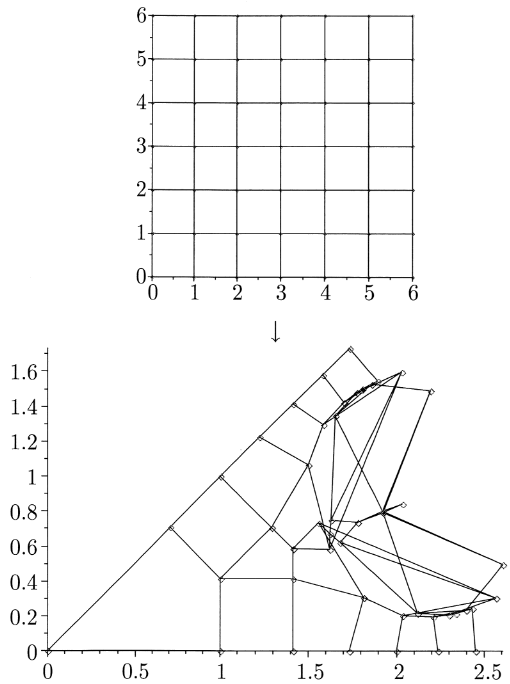


図 5　離散冪関数：失敗.

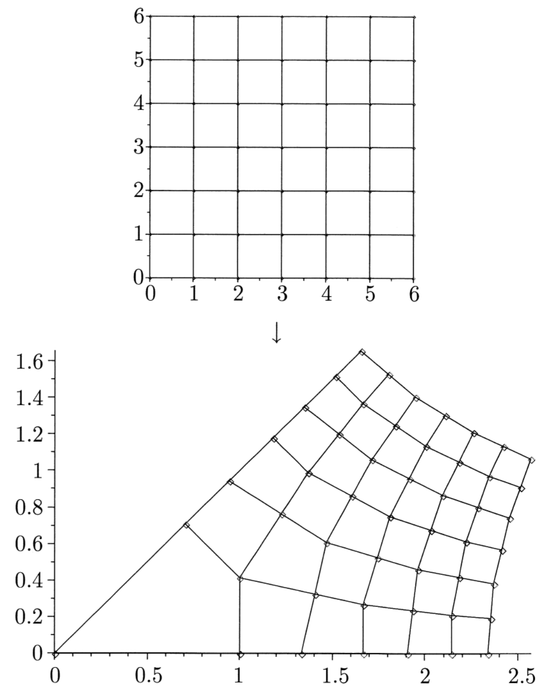


図 6　離散冪関数：よさそう.

$$f_{0,0}=0,\quad f_{1,0}=1,\quad f_{0,1}=i^{\gamma}$$

で第一象限の境界 $(n,0)$ と $(0,m)$ だけで解いた値

$$f_{n,0},\quad f_{0,m}$$

を境界値に使って，内部の単位正方形で複比 $=-1$ を周りから順々に解いていくと，第一象限内部での解の図は連続のときと同じような綺麗なものになる（図 6）．連続のときの像図 4 と図 6 を重ねて描いたものが図 7．このこと（単位正方形の像は重ならないこと）は証明されている[4)]．

さらにそうして解いた第一象限内部での解 $f_{n,m}$ は上の差分方程式を満たす．上の差分方程式は，格子の刻み幅を 0 に近づければ，連続の場合に $f=z^{\gamma}$ が満たす微分方程式

$$\gamma f = z\frac{df}{dz}$$

になるが，そうなる差分方程式はいくらでもあるので，この差分方程式は，これでうまく行ったというだけで，これでなくてはならないという「必然性」はないと思われる．また，上で 3 点での初

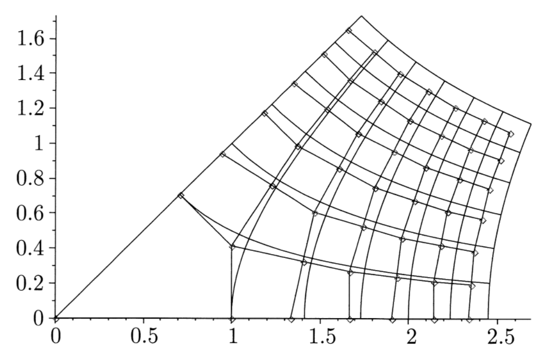


図 7　連続のときの像図 4 と図 6 を重ねた.

期条件下で，正の軸上（の格子点）で差分方程式を解く（組合せ的な式で書ける）わけだが，初期条件 $f_{0,0}=0$ とするから，$\gamma>0$ でないと話がおかしいし，分母に 0 因子が出てこないためとか，その他の理由で結局，条件

$$0<\gamma<2$$

が付いてしまう；これを見ても，何だか不自然な感じが拭えない．

第一象限の境界だけでなく内部の点での $f_{n,m}$ の値を閉じた形で書ければ面白いと思う．一つだ

け中に入ったところでの値は超幾何関数を使って書けることが Agafanov によって示されている．それより中に入ると，その値は Painlevé 関数と関係することが分かってきた[5]．しかし，考えてみると，たかが冪関数の離散版を得るのに，こんな難しい関数が出てくるというのも，何だか変というか興味深いというか．

今後「離散正則関数」はどうなって行くのか，私には全く分からない．

最後に，この項を書くに当たって，九大の院生の安藤央君と森下真優さんに助けて貰った；この場を借りて感謝の意を表します．

参考文献

1) Koebe, P., Kontaktprobleme der Konformen Abbildung, Ber. Sächs. Akad. Wiss. *Leipzig Math.-Phys. Kl.* 88(1936), 141–164.
2) Stephenson, K., *Introduction to circle packing: The theory of discrete analytic functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005.
3) Stephenson, K., CirclePack, software, http://www.math.utk.edu/~kens/CirclePack
4) Agafonov, S.I. and Bobenko, A.I., Discrete z^γ and Painlevé equations, *Internat. Math. Research Notices* 4(2000), 165–193.
5) 安藤央，離散冪関数 z^γ の超幾何関数による表示，九州大学数理学府　修士論文 (2010).

（よしだ・まさあき，九州大学大学院数理学研究院）

非線形差分方程式の爆発現象

松家 敬介・時弘 哲治

1. はじめに

「爆発」という言葉で我々が想起するのは，火山の爆発，火薬の爆発，人口爆発，（宇宙創生時の）ビッグバンなどのように，ある対象の非常に急激な増加現象である．自然あるいは社会現象は，多くの場合，微分方程式によってモデル化されるが，こうした爆発現象に対応するのが「微分方程式の解の爆発」である．例えば，次の微分方程式の初期値問題を考えてみよう．

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = v^{1+\alpha} \ (t > 0,\ \alpha > 0), \\ v(0) = a_0 > 0. \end{cases} \tag{1}$$

この常微分方程式は求積法により簡単に解を求めることができ，$0 < t < T_{ex} := \alpha^{-1}a_0^{-\alpha}$ において

$$v(t) = \frac{\alpha^{-1/\alpha}}{(\alpha^{-1}a_0^{-\alpha} - t)^{1/\alpha}} \tag{2}$$

と表される．この函数のグラフの概形は図1のようになる．

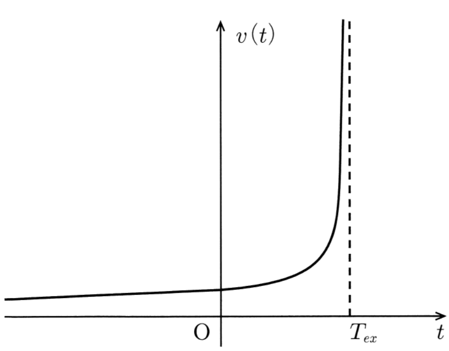


図1 (2)のグラフの概形.

この形からわかるように，$t \to T_{ex} - 0$ で v は無限大に発散し，これ以上解を接続することはできない．このように，ある正数 T が存在し $t \to T - 0$ のとき $v(t) \to \infty$ となることを（常微分方程式の）**解の爆発**と言う．簡単に言えば，解の爆発とは，ある初期値から出発した解が有限時間内に無限大に発散することである．ところで，微分方程式を数値的に扱うためには，その方程式の差分方程式で近似する必要がある．微分方程式の初期値問題 (1) の自然な差分化は，次のものであろう．

$$\begin{cases} \dfrac{v(t+\delta) - v(t)}{\delta} = v(t)^{1+\alpha} \quad (t > 0,\ \alpha > 0), \\ v(0) = a_0 > 0. \end{cases}$$

$t = n\delta$, $v_n := v(n\delta)$ $(n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ とおくと，これは次の漸化式に等しい．

$$v_{n+1} = (1 + \delta(v_n)^\alpha)v_n \quad (v_0 = a_0 > 0).$$

ところが，この漸化式では，v_n が有限な値であれば必ず v_{n+1} も有限な値をとり，解は $n \to +\infty$ では発散するが，決して有限の n では発散しない．つまり，(1) を単純に差分化したものでは「爆発」という現象を記述できなくなったことになる．これは微分方程式の数値計算の観点からは大変不都合である．

解の爆発は，非線形偏微分方程式論において盛んに研究され，現在も様々な研究が進行している[1)]．特に，方程式に含まれるパラメータによって解の

定性的な挙動が変化するため，解の変化をもたらすパラメータの値（臨界指数）について多くの結果が得られている．数値的な解析の観点からも，また，純粋に離散方程式の観点からも，解の爆発を示す非線形偏微分方程式の離散アナログを構成することは重要な意義を持つと思われる．しかしながら，上に述べたように，単純な差分化では解の爆発すら再現することはできない．本稿では，実は，うまく離散化を行うことによって，連続系の解の爆発を離散系でも十分よく再現できることを示す[2]．特に，**藤田指数**と呼ばれる偏微分方程式の解の爆発を特徴付けるパラメータが，対応する離散系（偏差分方程式）にも全く同じ形で現れることを紹介する．

2. 非線形熱方程式の解の爆発

1966年に藤田宏は次の偏微分方程式（**半線形熱方程式**）の解の爆発について考察した．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} = \Delta f + f^{1+\alpha} \quad (t>0,\ \vec{x}\in\mathbb{R}^d,\ \alpha>0), \\ f(0,\vec{x}) = a(\vec{x}) \quad (\vec{x}\in\mathbb{R}^d). \end{cases} \tag{3}$$

ここで $\Delta := \sum_{k=1}^{d} \dfrac{\partial^2}{\partial {x_k}^2}$ は d 次元のラプラシアンであり，$a(\vec{x}) \geq 0,\ \ a(\vec{x}) \not\equiv 0$ とする．もしも，$a(\vec{x}) = a_0$（正定数）であれば，この方程式は空間一様の解を持ち，$f(t,\vec{x}) = v(t)$ とおけば，$v(t)$ は (1) を満たし，したがって，(2) で与えられる解の爆発を示すことになる．一般に，偏微分方程式に対して，

定義 1 $f := f(t,\vec{x})$ $(t \geq 0,\ \vec{x}\in\mathbb{R}^d)$ を偏微分方程式の解とする．ある正数 T が存在し

$$\limsup_{t\to T-0} \|f(t,\cdot)\|_{L^\infty} = \infty$$

が成り立つとする．ただし，$\|f(t,\cdot)\|_{L^\infty} := \sup_{\vec{x}\in\mathbb{R}^d} |f(t,\vec{x})|$．このとき，解 f は時刻 T で爆発すると言う．

この定義の下で，空間的に非一様な初期条件の場合には，(3) の解の爆発に関して次の定理が知られている．

定理 1

1. $0 < \alpha \leq 2/d$ のとき，どんなに小さな初期値に対しても，ある有限な時刻 T が存在して (3) の解はその時刻で爆発する．
2. $2/d < \alpha$ のとき，初期値 $a(\vec{x})$ を十分小さくとると (3) の解は任意の時刻で爆発しない．

この定理は藤田[3]によって $0<\alpha<2/d$, $2/d<\alpha$ の場合が示され，後に Weissler ら[4~6]によって $\alpha = 2/d$ の場合が示された．この定理を見てみると (3) の解の爆発の有無は初期値 $a(\vec{x})$ だけではなく，方程式に含まれるパラメータ α にも依存していることがわかる．特に臨界指数 $\alpha = 2/d$ で解の定性的な振舞いが変わっている．この値 $2/d$ を藤田指数と呼ぶ．次節以降で，(3) の離散化について考察する．

3. 離散化された半線形熱方程式

まず，常微分方程式 (1) の解の爆発を保存する離散化を考えてみよう．重要な点は解を保存することであるから，求めるべき離散方程式は (2) に類似した解を持つはずである．δ を差分間隔とすれば，その離散方程式の解 v_n $(n\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$ は，常微分方程式の解 $v(t)$ を用いて

$$v_n = v(n\delta) = \frac{\alpha^{-1/\alpha}}{(\alpha^{-1}a_0^{-\alpha} - n\delta)^{1/\alpha}} \tag{4}$$

のように表されればよい．すなわち

$$\frac{1}{(v_n)^\alpha} = \frac{1}{(a_0)^\alpha} - n\alpha\delta$$

が成り立てばよい．これを解にもつ差分方程式が

$$\frac{1}{(v_{n+1})^\alpha} = \frac{1}{(v_n)^\alpha} - \alpha\delta \quad (v_0 = a_0)$$

であることはすぐにわかる．これを書き直すと常差分方程式の初期値問題：

$$\begin{cases} v_{n+1} = \dfrac{v_n}{(1-\alpha\delta(v_n)^\alpha)^{1/\alpha}} \\ v_0 = a_0 > 0 \end{cases} \tag{5}$$

が得られる．この方程式が，(4) を解にもつことは構成法から明らかである．また，$v_n = v(n\delta)$ として $\delta \to 0$ を考えれば，

$$(1-\alpha\delta(v_n)^\alpha)^{-1/\alpha} \sim 1+\delta(v_n)^\alpha + O(\delta^2)$$

であるので，(5) は

$$\frac{v((n+1)\delta)-v(n\delta)}{\delta} = v(n\delta)^{1+\alpha}+O(\delta)$$

であり，$\delta \to 0$ で微分方程式 (1) に一致する．したがって，(5) は解の爆発を保存した (1) の離散化と言える．

この常微分方程式での考察をもとに，(3) の離散化として次の非線形偏差分方程式を考えよう．

$$F_{\vec{n}}^{\tau+1} = \frac{G_{\vec{n}}^\tau}{\{1-\alpha\delta(G_{\vec{n}}^\tau)^\alpha\}^{1/\alpha}}$$
$$(\tau \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ \vec{n} \in \mathbb{Z}^d,\ \alpha > 0,\ \delta > 0). \quad (6)$$

ただし，$G_{\vec{n}}^\tau$ は

$$G_{\vec{n}}^\tau := \frac{1}{2d}\sum_{k=1}^{d}(F_{\vec{n}+\vec{e}_k}^\tau + F_{\vec{n}-\vec{e}_k}^\tau),$$

e_k は第 k 成分のみを 1 とする単位ベクトル：$\vec{e}_k := (0,\ldots,0,\underbrace{1}_{k},0,\ldots,0)$ である．また，(3) と同じように初期値 $F_{\vec{n}}^0$ は非負であり，恒等的に 0 ではないものとする．

$T_N(F_{\vec{n}}) := \{1-\alpha\delta(F_{\vec{n}})^\alpha\}^{-1/\alpha}F_{\vec{n}}, T_D(F_{\vec{n}}) := G_{\vec{n}}$ とすれば，(6) は

$$F_{\vec{n}}^{\tau+1} = (T_N \circ T_D)(F_{\vec{n}}^\tau)$$

と表される．T_N は局所的な非線形作用を表しており (5) に等しい．一方，T_D は空間的に一様な拡散作用を示す．

まず，(6) は連続極限で (3) に一致することを確認しよう．$|\delta| \ll 1$ とすると，先ほどと同様にして

$$F_{\vec{n}}^{\tau+1} = G_{\vec{n}}^\tau\{1+\delta(G_{\vec{n}}^\tau)^\alpha\}+O(\delta^2)$$

が得られる．ここで十分に滑らかな関数 $F(t,\vec{x})$ が存在して $F_{\vec{n}}^\tau = F(\delta\tau, \xi\vec{n})$ $(\xi := \sqrt{2d\delta})$ を満たすとすると，

$$G_{\vec{n}}^\tau = \sum_{k=1}^{d}\frac{F(t,\vec{x}+\xi\vec{e}_k)+F(t,\vec{x}-\xi\vec{e}_k)}{2d}$$
$$(=: G(t,\vec{x}))$$

であり，

$$\frac{F(t+\delta,\vec{x})-F(t,\vec{x})}{\delta}$$
$$= \sum_{k=1}^{d}\frac{F(t,\vec{x}+\xi\vec{e}_k)-2F(t,\vec{x})+F(t,\vec{x}-\xi\vec{e}_k)}{\xi^2}$$
$$+\{G(t,\vec{x})\}^{1+\alpha}+O(\delta)$$

を得る．$\delta \to +0$ のとき，$\xi^2 = 2d\delta$ より $\xi \to +0$ であり，

$$\sum_{k=1}^{d}\frac{F(t,\vec{x}+\xi\vec{e}_k)-2F(t,\vec{x})+F(t,\vec{x}-\xi\vec{e}_k)}{\xi^2}$$
$$= \sum_{k=1}^{d}\frac{\partial^2 F}{\partial {x_k}^2}+O(\xi^2),$$
$$G(t,\vec{x}) = F(t,\vec{x})+O(\xi^2)$$

である．したがって，

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \Delta F + F^{1+\alpha}$$

となり，連続極限では (3) に一致することが確かめられた．

偏微分方程式の解の爆発の定義はそのままでは離散系には適用できないので，改めて非線形偏差分方程式 (6) の「解の爆発」を定義しよう．(6) の右辺の分母に注目すると，$1-\alpha\delta(G_{\vec{n}}^\tau)^\alpha$ が 0 になるとき，$F_{\vec{n}}^{\tau+1}$ が発散することがわかる．もしも時間変数が連続であり，F の値が連続的に変わるなら，ある有限の時刻でこの項が 0 となるとき F は発散すると考えてよい．しかしながら，離散系では値の変化は離散的であるので，ある時間ステップでちょうど 0 の値をとるとは限らない．そこで，ある時間ステップでこの項が 0 以下となるとき，すなわち，離散方程式が定義できなくなるとき発散すると定義するのが自然であると思われる．したがって，(偏差分方程式の初期値問題 (6) の) 解の爆発を以下のように定義することにする．

定義 2 $\tau < \tau_0$ においては，任意の $\vec{n}$ に対して $G_{\vec{n}}^\tau < (\alpha\delta)^{-1/\alpha}$ が成り立ち，$\tau = \tau_0$ において，ある $n_0 \in \mathbb{Z}^d$ が存在して，$G_{\vec{n}_0}^{\tau_0} \geq (\alpha\delta)^{-1/\alpha}$ となる，即ち $1-\alpha\delta(G_{\vec{n}_0}^{\tau_0})^\alpha \leq 0$ となるとき，(6) の解は時刻 τ_0+1 で爆発すると言う．

この定義によると，(6) の空間一様な解は必ず爆発する．実際，空間一様な初期値，即ち $F_{\vec{n}}^0 = a_0 > 0$ を与えたとき，$F_{\vec{n}}^\tau$ は $\vec{n}$ に依存しない．それを F^τ と書くことにする．このとき $G_{\vec{n}}^\tau = F^\tau$ となることに注意すると (6) は常差分方程式 (5) に等しい．あるいは，次のように書き換えることもできる．

$$(F^{\tau+1})^{-\alpha} = (F^\tau)^{-\alpha} - \alpha\delta,$$
$$F^0 = a_0 > 0.$$

この解は明らかに

$$(F^\tau)^{-\alpha} = (a_0)^{-\alpha} - \alpha\delta\tau$$

であり，

$$1 - \alpha\delta(F^\tau)^\alpha = \frac{1}{1 - \alpha\delta\tau(a_0)^\alpha}$$

が成り立つ．したがって，τ を増加させてゆくと，ある有限な $\tau_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ で右辺が 0 以下になる．$G_{\vec{n}}^\tau = F^\tau$ を考慮すると，定義によって解は爆発することがわかった．

それでは，一般の非一様な初期条件に対して (6) の解の爆発はどうなるであろうか．定理 1 に示されるように，半線形熱方程式では藤田指数が重要な役割をもっていた．驚いたことに，次の定理に示されるように (6) に対しても全く同じ振舞いが見られる．

定理 2

1. $0 < \alpha \leq 2/d$ のとき，ある $\tau_0 \in \mathbb{Z}^d$ が存在して (6) の解は時刻 τ_0 で爆発する．

2. $2/d < \alpha$ のとき，初期値 $F_{\vec{n}}^0$ を十分に小さくすると (6) の解は任意の時刻で爆発しない．

偏差分方程式 (6) においても，藤田指数が解の爆発の臨界指数を与えるのである．この点からも，(6) は半線形熱方程式の良い差分化になっていることがわかる．次節以降で，この定理の証明の概略を説明することにする．

4. 定理 2 の証明

最初に，本質的ではないが，次のように従属変数変換を行うことにする．

$$f_{\vec{n}}^\tau := (\alpha\delta)^{1/\alpha} F_{\vec{n}}^\tau, \quad g_{\vec{n}}^\tau := (\alpha\delta)^{1/\alpha} G_{\vec{n}}^\tau.$$

この変換によって (6) はパラメータ δ に依存しない次の形に書き換えられる．

$$f_{\vec{n}}^{\tau+1} = \frac{g_{\vec{n}}^\tau}{\{1 - (g_{\vec{n}}^\tau)^\alpha\}^{1/\alpha}}. \tag{7}$$

定理 2 は，半線形熱方程式に対する定理 1 の証明の離散化を考えることで，同様な証明を与えることができる．$\alpha \neq 2/d$ の場合は，優解と劣解を構成し，真の解と比較することによって証明される．すなわち，$\underline{f}_{\vec{n}}^\tau \leq f_{\vec{n}}^\tau \leq \bar{f}_{\vec{n}}^\tau$ を満たす優解 $\bar{f}$ と劣解 $\underline{f}$ をうまく構成し，$\alpha > 2/d$ では $\bar{f}$ が十分小さな初期条件の下では爆発しないこと，$\alpha < 2/d$ では $\underline{f}$ がどんな初期条件に対しても爆発することを示すことで証明される．$\alpha = 2/d$ の場合は，半線形熱方程式の場合でも証明は簡単ではないが，Weissler による証明の離散アナログを用いれば証明することができる．

まず，離散拡散方程式のグリーン函数 $U_{\vec{n}}^\tau$ を次式によって定義する．

$$\begin{cases} U_{\vec{n}}^{\tau+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{d} \frac{U_{\vec{n}+\vec{e}_k}^\tau + U_{\vec{n}-\vec{e}_k}^\tau}{2d}, \\ U_{\vec{n}}^0 = \delta_{0,\vec{n}}. \end{cases}$$

この $U_{\vec{n}}^\tau$ によって，$\{h_{\vec{n}}^\tau\}$，$\{\underline{f}_{\vec{n}}^\tau\}$，$\{\bar{f}_{\vec{n}}^\tau\}$ を次のように定めることにする．

$$h_{\vec{n}}^\tau := \sum_{\vec{n}'} U_{\vec{n}-\vec{n}'}^\tau f_{\vec{n}'}^0,$$

$$\underline{f}_{\vec{n}}^\tau := \frac{h_{\vec{n}}^\tau}{\{1 - \tau(h_{\vec{n}}^\tau)^\alpha\}^{1/\alpha}},$$

$$\bar{f}_{\vec{n}}^\tau := \frac{h_{\vec{n}}^\tau}{\left\{1 - \sum_{s=0}^{\tau}(m_s)^\alpha\right\}^{1/\alpha}} \left(m_\tau := \sup_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^d} |h_{\vec{n}}^\tau|\right).$$

$h_{\vec{n}}^\tau$ は，無限個の点にわたる和のように見えるが，$U_{\vec{n}}^\tau$ が値を持つのは $\mathbb{Z}^d$ 上の有限個の点に限られるので，実際は有限和となり問題なく定義されている．$\underline{f}_{\vec{n}}^\tau$，$\bar{f}_{\vec{n}}^\tau$ は，それぞれ定義式の分母に $1 - \tau(h_{\vec{n}}^\tau)^\alpha$，$1 - \displaystyle\sum_{s=0}^{\tau}(m_s)^\alpha$ と 0 以下になり得る項を含んでいる．そこでこれらの項が正になると

き $\underline{f}_{\vec{n}}^{\tau}$, $\bar{f}_{\vec{n}}^{\tau}$ が「$(\tau,\vec{n})$ で問題なく定義される」ということにする.

次の命題は帰納法により簡単に示すことができる.

命題 1　ある $\tau\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ において任意の $\vec{n}\in\mathbb{Z}^d$ に対して $\bar{f}_{\vec{n}}^{\tau}$ が問題なく定義されるとき (7) の解は時刻 τ で爆発せず, 次の不等式が成り立つ.

$$f_{\vec{n}}^{\tau}\leq\bar{f}_{\vec{n}}^{\tau}.$$

ある時刻 $\tau\in\mathbb{Z}^d$ で (7) の解が爆発しないとき, 同じ τ において任意の $\vec{n}\in\mathbb{Z}^d$ に対して $\underline{f}_{\vec{n}}^{\tau}$ は問題なく定義され, 次の不等式が成り立つ.

$$\underline{f}_{\vec{n}}^{\tau}\leq f_{\vec{n}}^{\tau}.$$

この命題から, ただちに, $\bar{f}_{\vec{n}}^{\tau}$ が任意の $(\tau,\vec{n})\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\times\mathbb{Z}^d$ に対して問題なく定義できていれば, (7) の解は任意の時刻で爆発しないこと, $\underline{f}_{\vec{n}}^{\tau}$ がある $(\tau,\vec{n})\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\times\mathbb{Z}^d$ で定義できないとき, (7) の解はその時刻までに爆発することがわかる. したがって, $\bar{f}_{\vec{n}}^{\tau}$, $\underline{f}_{\vec{n}}^{\tau}$ の挙動を調べれば (7) の解の爆発の有無がわかる.

$\bar{f}_{\vec{n}}^{\tau}$, $\underline{f}_{\vec{n}}^{\tau}$ の挙動を調べるために次の命題を用いる.

命題 2　$U_{\vec{n}}^{\tau}$ は以下のように評価できる.

$$U_{\vec{n}}^{\tau}\sim 2\left(\frac{d}{2\pi}\right)^{d/2}\tau^{-d/2}\quad(\tau\to+\infty).$$

ただし, $A^{\tau}\sim B^{\tau}\ (\tau\to+\infty)\Leftrightarrow\lim_{\tau\to+\infty}A^{\tau}/B^{\tau}=1$ とする.

これは $U_{\vec{n}}^{\tau}$ が $\mathbb{Z}^d$ 上の単純ランダムウォークの推移確率ともみなせることから示される. 証明は文献 7) などを参照されたい. この命題を用いると $h_{\vec{n}}^{\tau}$ が次のように評価される.

$$h_{\vec{n}}^{\tau}=\sum_{\vec{n}'}U_{\vec{n}-\vec{n}'}^{\tau}f_{\vec{n}'}^{0}\sim C\tau^{-d/2}.$$

ただし, $C:=2(d/2\pi)^{d/2}\sum_{\vec{n}}f_{\vec{n}}^{0}$ であり τ には依存しない定数である.

この命題により次の評価が得られる.

$$1-\tau(h_{\vec{n}}^{\tau})^{\alpha}\sim 1-C^{\alpha}\tau^{1-d\alpha/2}\quad(\tau\to+\infty),\tag{8}$$

$$1-\sum_{s=0}^{\tau}(m_s)^{\alpha}\sim 1-\left(\sum_{s=0}^{\tau_0}(m_s)^{\alpha}+\sum_{s=\tau_0+1}^{\tau}C^{\alpha}\tau^{-d\alpha/2}\right)\quad(\tau\to+\infty).\tag{9}$$

ただし, (9) の $\tau_0(<\tau)$ は十分大きなある正整数である. したがって, $0<\alpha<2/d$ では, $1-d\alpha/2>0$, および C が τ に依存しない定数であることから (8) の右辺は τ が十分に大きければ負になることがわかる. よって, $1-\tau(h_{\vec{n}}^{\tau})^{\alpha}$ も τ が十分に大きければ負になり, 解が爆発することがわかる. 一方, $2/d<\alpha$ のときは, $d\alpha/2>1$ であり $\sum_{n=1}^{\infty}1/n^k<\infty\quad(k>1)$ から (9) の和 $\sum_{s=\tau_0+1}^{\tau}C^{\alpha}\tau^{-d\alpha/2}$ は τ がどんなに大きくなっても有界であり, $\sum_{s=0}^{\tau_0}(m_s)^{\alpha}$ と C は (7) の初期値 $f_{\vec{n}}^{0}$ を小さくすればいくらでも小さくできる. したがって, (9) の右辺はどんなに τ が大きくなっても正になるようにできる. よって (7) の初期値を十分に小さくすれば, $1-\sum_{s=0}^{\tau}(m_s)^{\alpha}$ はどんなに τ が大きくなっても正に保つことができ, 解は爆発しない. 以上で定理 2 が $\alpha\neq 2/d$ の場合に証明された.

$\alpha=2/d$ の場合は, 背理法を用いて示すことができる. まず, 次の命題が必要になる.

命題 3　$\alpha=2/d$ のとき (7) の解が任意の時刻で爆発しないのであれば, τ に依存しないある正定数 C_0 が存在して次が成り立つ.

$$\sum_{\vec{n}}f_{\vec{n}}^{\tau}\leq C_0.$$

この命題は先ほどの命題 1 の後半の主張から従う. このような正定数 C_0 が存在しなければ, $\alpha=2/d$ での解の爆発が証明される. そのためにもう一つ命題を準備する.

命題 4 (7) の解は次を満たす．

$$f_{\vec{n}}^{\tau} = h_{\vec{n}}^{\tau} + \sum_{s=1}^{\tau} \sum_{\vec{n}'} U_{\vec{n}-\vec{n}'}^{\tau-s} H(g_{\vec{n}'}^{s-1}). \quad (10)$$

ただし，$H(g) := g/(1-g^{\alpha})^{1/\alpha} \quad (0 \le g < 1)$.

(10) はもとの半線形熱方程式 (3) の解が満たす積分方程式に対応するものである．詳細は省くが，この命題および $\sum_{\vec{n}} U_{\vec{n}}^{\tau} = 1$ やいくつかの不等式の評価を用いることで，次の不等式が得られる．

$$\sum_{\vec{n}} f_{\vec{n}}^{\tau} \ge \frac{1}{\alpha} \sum_{s=1}^{\tau} \sum_{\vec{n}} (h_{\vec{n}}^{\tau})^{1+\alpha}$$

ここで命題 2 を用いると $h_{\vec{n}}^{\tau}$ は次のように評価される．

$$h_{\vec{n}}^{\tau} \sim C\tau^{-d/2} \exp\left(-\frac{4^{1/d} d|\vec{n}|^2}{2\tau}\right) \ (\tau \to +\infty).$$

したがって，$\delta := 1/\tau$, $\xi := \sqrt{2d\delta}$ とすると

$$\begin{aligned}
&\sum_{\vec{n}} (h_{\vec{n}}^{\tau})^{1+2/d} \\
&\sim \sum_{\vec{n}} \left(\frac{C}{\tau} \exp\left[\frac{4^{1/d} d|\vec{n}|^2}{2\tau}\right]\right)^{1+2/d} \quad (\tau \to +\infty) \\
&= C^{1+2/d} \tau^{-1} \sum_{\vec{n}} \frac{\xi^d}{(2d\delta\tau)^{d/2}} \\
&\quad \times \exp\left\{-\frac{4^{1/d}(\xi|\vec{n}|)^2}{4\tau\delta}\left(1+\frac{2}{d}\right)\right\} \\
&\sim \frac{C^{1+2/d}}{\tau(2d)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left\{-\frac{|\vec{x}|^2}{4^{(d-1)/d}}\left(1+\frac{2}{d}\right)\right\} d\vec{x} \\
&= \frac{C^{1+2/d}}{2} \left(\frac{2\pi}{d+2}\right)^{d/2} \frac{1}{\tau}.
\end{aligned}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ が発散することから $\sum_{\vec{n}} f_{\vec{n}}^{\tau}$ は τ を大きくすればいくらでも大きくなることがわかり，命題 3 によって，解が爆発しないとした仮定との矛盾が示せたことになり，定理 2 が証明できたことになる．

5. おわりに

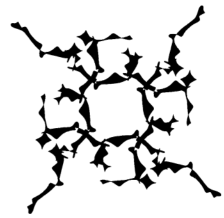
本稿では，連続系で研究が進んでいる半線形熱方程式の解の爆発現象を，離散系においても同様に捉えられることを見てきた．可積分系と呼ばれる対称性の良い系に対しては，その解や対称性をうまく保持したまま離散化できることはよく知られているが，半線形熱方程式のような非可積分系においても，うまく離散化を行えば，解の特徴を保持することができることがわかったことになる．離散化することの意義は，数値計算への応用上の重要性ばかりでなく，非可積分離散系という新しい研究対象を生み出すことにもある．爆発現象以外にも連続系（非線形偏微分方程式系）の特徴的現象を離散系（非線形偏差分方程式系）で再現できる現象はまだまだたくさん存在すると思われる．さらに，本特集号の磯島氏の解説にあるように超離散系においても同様な現象を捉えることができるのではないかと思われる．連続の世界と離散の世界の交流が盛んになり，両分野が一層発展することを期待している．

参考文献

1) 柳田英二（編）『爆発と凝集』（東京大学出版会，2006）．
2) K.Matsuya and T. Tokihiro, Existence and non-existence of global solutions for a discrete semilinear heat equation, *preprint*.
3) H. Fujita, On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. A Math.* **16** (1966), 109–124.
4) K. Hayakawa, On nonexistence of global solutions of some semilinear parabolic equations, *Proc. Japan Acad.* **49** (1973), 503–505.
5) K. Kobayashi, T. Sirao, H. Tanaka, On the growing up problem for semilinear heat equations, *J. Math. Soc. Japan* **29** (1977), 407–424.
6) F.B. Weissler, Existence and nonexistence of global solutions for a semilinear heat equation, *Israel J. Math.* **38** (1981), 29–40.
7) 志賀徳造著『ルベーグ積分から確率論』（共立出版，2000）．

（まつや・けいすけ，東京大学大学院数理科学研究科）
（ときひろ・てつじ，東京大学大学院数理科学研究科）

離散的な曲面



近藤　剛史・W. Rossman

1. 序

本稿では，双等温曲面（共形曲率線座標が存在する曲面，英語で isothermic surface と呼ばれる）の離散化へのアプローチについて説明する．なぜこれに興味があるのかを説明するために，まず2節で問題の背景にある歴史について記述し，3節以降で離散化の手続きのより具体的な説明をする．

2. 背景の歴史

近年，解析や幾何学の様々な場所に見られるように，滑らかな対象の離散的な類似物を見つけることが数学の重要なテーマになってきている．そのため，例えば双等温曲面，極小曲面，平均曲率一定（constant mean curvature, CMC と略す）曲面，平坦曲面，ガウス曲率一定曲面などの滑らかな曲面の概念の離散版が何かを考えることは自然な問題である．しかし，一つの確定した方法があるわけではなく，どの定義を採用するかは，滑らかな曲面のもつどの性質を離散的な場合に成立させたいのかによって異なる．

滑らかな極小曲面は，局所的な領域が固定された境界をもつ曲面の中で面積を最小にするという性質をもつので，一つの非常に自然な離散化の仕方が存在する．つまり，区分的に線形な三角形分割された曲面であって，境界を保ち，単体構造を保つような連続的で区分的に線形な（頂点の）変分に関する面積汎関数の臨界点として3次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 内の離散的な極小曲面を定義することができる．また，曲面の片側の領域の体積を保つような変分を考えることにより離散的な CMC 曲面も同様に定義することができる．これらの定義は明らかに滑らかな場合の変分問題の解としての特徴付けをまねたものである．その結果，離散的な曲面は対応する変分法的な性質をもつことになる．このアプローチによる離散的な極小カテノイドと CMC ドローネー曲面を図1の左に示している．図2は三重周期的な滑らかな極小曲面とその変分法的なアプローチによる離散的な類似物の一つである．

しかしながら，上のアプローチは対応する滑らかな曲面がもっている豊富な数学的構造（後述する変換理論など）を無視しているので，次にそのような構造について考えよう：

H. ホップ（Hopf）は $\mathbb{R}^3$ 内の種数0の閉じた CMC 曲面は球面に限ることを示した．ホップはさらに，曲面の種数に関する仮定なしですべての閉じた CMC 曲面は球面に限られるのかという問を立てた．実質的には彼の問は，$\mathbb{R}^3$ 内の任意の種数の閉じた CMC 曲面は実際には種数が0になり，したがって球面となるのか，ということである．

この問に対する肯定的な答をサポートすることとして，CMC 曲面に対する最大値の原理がある．この性質から，$\mathbb{R}^3$ 内の閉じた CMC 曲面は，埋

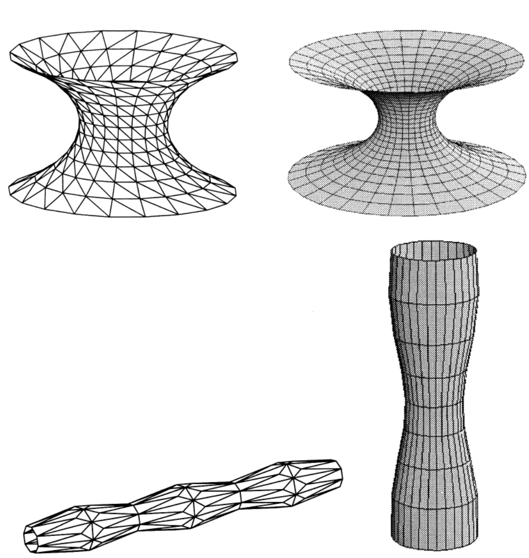


図1　離散的な極小カテノイド（上）と CMC ドローネー曲面（下）．上下の曲面はそれぞれ離散的極小曲面，離散的な CMC 曲面であり，左の 2 つは変分法的アプローチによる離散化，右の 2 つは可積分系のアプローチによる離散化の例である．

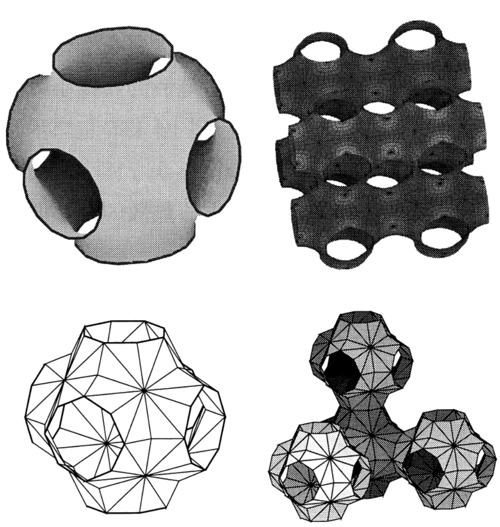


図2　上の段は滑らかな三重周期的なシュワルツ P 曲面の一部で，下の段はその変分法的アプローチによる離散的類似である．

め込まれていたら球面に限ることを示すことができる．このことから，もし閉じた CMC 曲面は種数が 0 であるか，埋め込まれているかのどちらかであれば，球面でなければならないことになる．

したがって，ホップの問題に対する否定的な答を得るには，種数が正であってかつ埋め込まれていないような例を作る必要がある．H. ウェンテ（Wente）は 1986 年，まさにそのような例を種数 1 のときに見つけたのである．この発見はホップの問題に対する否定的な答を与えているが，CMC 曲面のさらなる研究の起動力を与えることにもなった．ウェンテの発見に続き，U. アブレッシュ（Abresch），R. ワルター（Walter），J. シュプルック（Spruck）たちは，ウェンテの結果をより精密にした．特に彼らは，ウェンテが見つけたトーラスには，平面に含まれる曲率線の連続的な族が含まれていることを示した（曲率線とは接ベクトルが常に主曲率の方向を向いている曲面上の曲線のことである）．またさらに，これらのトーラス内の，各点における 2 つの曲率線のうち，もう一方の曲率線は球面にのることも示された．

ここで述べた結果と 1960 年代からの可積分系の理論の発展から，U. ピンカール（Pinkall），I. スターリング（Sterling），A. ボベンコ（Bobenko），J. ドルフマイスター（Dorfmeister），F. ペディト（Pedit），H. ウー（Wu）たちによって，CMC 曲面の研究に可積分系の理論からのテクニックが使えると認識されるようになった．

また，CMC 曲面の研究への可積分系によるアプローチは，離散的な CMC 曲面の概念を導く手助けもしてくれる．これらの概念は，滑らかな CMC 曲面が備えていた豊富な数学的構造の大部分を保持している．

したがって，ボベンコとピンカールが行ったように，滑らかな極小曲面，CMC 曲面の可積分系的な性質をまねて，代わりに離散可積分系を用いて離散的な極小曲面や CMC 曲面を定義することができる．これらの離散的な曲面は平面に含まれる四角形から作られている．このアプローチは滑らかな曲面がもつ変換理論などの構造を離散版でも兼ね備えているという利点はあるが，頂点の変分に関して面積の臨界点になるという性質は一般的には崩れてしまう．このアプローチによる離散的な極小カテノイドと CMC ドローネー曲面の例を図 1 の右に示している．しかし，このように離

散的な CMC 曲面を定義する前に，離散的な双等温曲面を定義し，さらに滑らかな双等温曲面の変換の理論（T 変換，ダルブー変換，ベックルント変換などを含む）を離散的な双等温曲面にまで発展させておく必要がある．双等温曲面はまた，ある種の離散的な正則関数の概念とも密接に関わっている．

このすべてのストーリーを数ページで述べるのは無理なので，ここではこのストーリーのある部分に集中し，どのようにして可積分系によるアプローチによって曲面の離散化がなされるのかの雰囲気を示したい．

3. 滑らかな曲面とクリストッフェル変換

後の記述を簡単にするため，四元数を用いる．四元数 $\mathbb{H}$ とは $1, i, j, k$ を基底にもつ $\mathbb{R}$ 上 4 次元の非可換な代数で，$ij = k, jk = i, ki = j, i^2 = j^2 = k^2 = -1$ を満たすものであった．つまり集合としては $\mathbb{H} = \{r_1 + r_2 i + r_3 j + r_4 k | r_i \in \mathbb{R}\}$ である．四元数 $q = r_1 + r_2 i + r_3 j + r_4 k$ に対して，r_1 を q の実部，$r_2 i + r_3 j + r_4 k$ を q の虚部と言い，それぞれ $\mathrm{Re}(q), \mathrm{Im}(q)$ と書く．q の絶対値を $|q| = \sqrt{{r_1}^2 + {r_2}^2 + {r_3}^2 + {r_4}^2}$ と定める．

3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ を純虚四元数（実部が 0 の四元数）の空間 $\mathrm{Im}\mathbb{H}$ と同一視し，その中の曲面を

$$x = x_1(u,v)i + x_2(u,v)j + x_3(u,v)k \in \mathrm{Im}\mathbb{H}\,,$$

$x_j(u,v) \in \mathbb{R}$ とする．

(u,v) が共形曲率線座標系であるとき（例えば臍点，つまり 2 つの主曲率が一致する点をもたない CMC 曲面や回転面はこのような座標をもつ），この座標を**双等温座標**と呼ぶ．つまり，その座標 (u,v) に対して，第一基本形式が単位行列の関数倍になり，第二基本形式が対角行列である：

$$I = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{11} \end{pmatrix}, \quad II = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix}.$$

ここでクリストッフェル変換 x^* を定義しよう．曲面 x に対して，次の条件を満たす曲面 x^* が存在するときにこの曲面を x のクリストッフェル変換と言う．

- x^* は x と同じ領域上で定義される．したがって，x の各点と x^* の各点の間に，座標を通して対応がある．
- x^* は x と同じ共形構造をもつ．
- x と x^* の対応する点での接平面は平行である．
- x と x^* は逆向きに向き付けられている．

ここで，x と x^* の，対応する点における主曲率方向もまた平行になることがわかる．

上で述べられている「逆向き」とは次のことである．すなわち，x 上のある点と対応する x^* 上の点での 2 つの平行な接平面に座標が決める向きが逆である，という意味である．

上で与えたクリストッフェル変換の記述は次の定義と同値であることがわかる：

定義 3.1. 曲面 x の**クリストッフェル変換**（または**双対曲面**）とは，$dx^* = x_u^{-1}du - x_v^{-1}dv$ を満たす曲面 x^* （$\mathbb{R}^3 \approx \mathrm{Im}\mathbb{H}$ 内で平行移動の自由度を除いて定義されている）のことである．

x_u と x_v は純虚四元数であったので，x_u^{-1} と x_v^{-1} が意味をもつことに注意しておく．

次が成り立つ．

定理 3.2. x は臍点をもたない曲面とする．x のクリストッフェル変換 x^* が存在することと x に双等温座標が取れることとは同値である．

x の平均曲率を H とし，単位法線ベクトルを n とする．H が定数であって双等温座標をもつときには，$x^* = x + H^{-1}n$ は x と同じ平均曲率をもつ平行 CMC 曲面であって，逆の向き付けをもつ．

円柱面は一つの簡単な例を与える．$\mathbb{R}^3$ 内の円柱 $x(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$ に対して，法ベクトルは $n = (-\cos u, -\sin u, 0)$ であり，クリストッフェル変換は $x^*(u,v) = (-\cos u, -\sin u, v)$ で，その法ベクトルは $n^* = (\cos u, \sin u, 0)$ である．したがって，$n^* = -n$ となっている．

4. 離散的な曲面とそのクリストッフェル変換

この節では，“離散的な微分幾何学”（discrete differential geometry, DDG と略される）に話を進める．

離散的な曲面 $\mathfrak{f}_p \in \mathrm{Im}\mathbb{H} \approx \mathbb{R}^3$ を考えよう．ここで p は離散的な格子領域（局所的には $\mathbb{Z}^2$ の部分領域）の任意の点とする．格子内に反時計周りに順序付けられた頂点 p, q, r, s (i.e. ある $m, n \in \mathbb{Z}$ に対してそれぞれ (m,n), $(m+1,n)$, $(m+1,n+1)$, $(m,n+1)$ となる）をもつ任意の四角形を考える．

前節では曲面を “x” で表していたが，ここでは “$\mathfrak{f}$” を用いる．これは滑らかな曲面と区別するためで，“x” は常に滑らかな曲面，“$\mathfrak{f}$” は離散的な曲面を表すことにする．

4 点 $\mathfrak{f}_p$, $\mathfrak{f}_q$, $\mathfrak{f}_r$, $\mathfrak{f}_s$ が共平面である，つまり $\mathbb{R}^3$ 内のある平面上の四角形の頂点となっていることを仮定することは自然である．すると曲面は平面に含まれる四角形を辺に沿ってつないだものから構成される．

また，さらに 4 点 $\mathfrak{f}_p$, $\mathfrak{f}_q$, $\mathfrak{f}_r$, $\mathfrak{f}_s$ が共円である，つまり同一円上にのっていると仮定すると，平面に含まれる四角形からなる曲面の概念を，3 次元球面や 3 次元双曲空間などの他の空間に含まれる曲面にも拡張することができる．実際，頂点たちが共円であるならば，“平面に含まれる四角形” を考える必要はなく，すべての必要な情報はその円自身に含まれている．後で共円の場合に話を制限するが，しばらくは 4 点 $\mathfrak{f}_p$, $\mathfrak{f}_q$, $\mathfrak{f}_r$, $\mathfrak{f}_s$ の配置に何の仮定もおかないことにする．

四角形 $\mathfrak{f}_p$, $\mathfrak{f}_q$, $\mathfrak{f}_r$, $\mathfrak{f}_s$ の複比を

$$\mathcal{C}_{pqrs} = (\mathfrak{f}_q - \mathfrak{f}_p)(\mathfrak{f}_r - \mathfrak{f}_q)^{-1}(\mathfrak{f}_s - \mathfrak{f}_r)(\mathfrak{f}_p - \mathfrak{f}_s)^{-1} \in \mathbb{H}$$

で定義する．

この複比は $\mathbb{R}^3$ の共形変換に関して不変ではないが，ほぼ共形不変である．すなわち，複比を次のような，複素共役を除いて定義される複素数値の複比

$$\hat{\mathcal{C}}_{pqrs} = \mathrm{Re}(\mathcal{C}_{pqrs}) \pm i|\mathrm{Im}(\mathcal{C}_{pqrs})| \in \mathbb{C}$$

に取り換えることで，共形不変な複比を作ることができる．

定理 4.1. $\hat{\mathcal{C}}_{pqrs}$ はメビウス変換で不変である．

証明. 空間 $\mathrm{Im}\mathbb{H}$ の点 $\mathfrak{A} = ai + bj + ck$ に次の変換を行う：

$\mathfrak{A} \mapsto rai + rbj + rck$,
$\mathfrak{A} \mapsto ai + bj + ck + (a_0 i + b_0 j + c_0 k)$,
$\mathfrak{A} \mapsto -ai - bj - ck$,
$\mathfrak{A} \mapsto (\cos(\theta)a - \sin(\theta)b)i + (\sin(\theta)a + \cos(\theta)b)j + ck$,
$\mathfrak{A} \mapsto (\cos(\theta)a - \sin(\theta)c)i + bj + (\sin(\theta)a + \cos(\theta)c)k$,
$\mathfrak{A} \mapsto ai + (\cos(\theta)b - \sin(\theta)c)j + (\sin(\theta)b + \cos(\theta)c)k$,
$\mathfrak{A} \mapsto (ai + bj + ck)/(a^2 + b^2 + c^2)$.

ここで，θ, r, a_0, b_0, c_0 は任意の実数で，a, b, c は $\mathrm{Im}\mathbb{H} \approx \mathbb{R}^3$ の座標を表す．このとき，この 7 つの変換の下で $\mathrm{Re}(q)$ と $|\mathrm{Im}(q)|$ が保存されることがわかる．これらの変換はそれぞれ，相似拡大，平行移動，鏡映，3 つの軸の周りの回転，（単位球面での）反転に対応しており，（向きを保つとは限らない）メビウス群を生成している．したがって $\hat{\mathcal{C}}$ はメビウス変換で不変であることがわかる． □

さて，頂点が p, q, r, s のすべての四角形に対して，像の点 $\mathfrak{f}_p, \mathfrak{f}_q, \mathfrak{f}_r, \mathfrak{f}_s$ は共円であると仮定しよう．複素数値の複比 $\hat{\mathcal{C}}_{pqrs}$ がメビウス変換で不変であることがわかっているので，メビウス変換を用いて 4 点のうちの 3 点を計算しやすい点に移すことで，次の補題を証明することができる．

補題 4.2. 像の点 $\mathfrak{f}_p, \mathfrak{f}_q, \mathfrak{f}_r, \mathfrak{f}_s$ が共円であることと，それらの複比が実数値を取ることは同値である．

さらに次の条件を考える．

定義 4.3. 曲面 $\mathfrak{f}$ の辺上で定義された実数値関数 a_{**} が存在して，

$$a_{pq} = a_{sr} \in \mathbb{R}\,, \quad a_{ps} = a_{qr} \in \mathbb{R}$$

を満たし，すべての四角形に対して複比が

$$\mathcal{C}_{pqrs} = a_{pq}/a_{ps} \in \mathbb{R}$$

と書けるとき，$\mathfrak{f}$ は**離散的双等温曲面**（discrete isothermic surface）であると言う．

a_{**} は対称である，つまり，$a_{pq} = a_{qp}$ がすべての隣接する p と q で成立することに注意しておく．

定義 4.3 は戸田方程式

$$\mathcal{C}(m-1,n-1)\mathcal{C}(m,n) = \mathcal{C}(m,n-1)\mathcal{C}(m-1,n)$$

を満たすことと同値である．ここで $\mathcal{C}(m,n)$ は複比

$$\mathcal{C}_{(m,n),(m+1,n),(m+1,n+1),(m,n+1)}$$

を表し，すべて実数である．

定義 4.3 における "離散的な双等温曲面" とは何かの一つの見方として，次のようなものがある：滑らかな曲面 x をとり，そこに曲率線座標 $x = x(u,v)$ を与えると，$x_u \perp x_v$ となる（曲率線座標は臍点を除いてはいつでも存在する）．このとき，第一，および第二基本形式は

$$I = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{22} \end{pmatrix}, \quad II = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix}$$

となる．u のみによる任意の単調関数 $\tilde{u}$ と，v のみによる任意の単調関数 $\tilde{v}$ を用いて，$x = x(u,v) = x(\tilde{u}(u), \tilde{v}(v))$ とすることにより，座標を伸び縮みさせることができる．ここで，$\langle x_{\tilde{u}}, x_{\tilde{v}} \rangle = 0$ と $x_{\tilde{u}\tilde{v}} = x_{uv} \frac{du}{d\tilde{u}} \frac{dv}{d\tilde{v}}$ から $\langle x_{\tilde{u}\tilde{v}}, \vec{N} \rangle = 0$ であることがわかるので，$(\tilde{u}, \tilde{v})$ もまた曲率線座標となることに注意しておく．このとき，曲面が双等温曲面であることは，$\tilde{u}, \tilde{v}$ が存在して計量が共形的となること，すなわち $\langle x_{\tilde{u}}, x_{\tilde{u}} \rangle = \langle x_{\tilde{v}}, x_{\tilde{v}} \rangle$ となることと同値であり，これは，u のみによる関数 a と v のみによる関数 b が存在して，

$$\frac{g_{11}}{g_{22}} = \frac{a(u)}{b(v)}$$

となることとも同値である．

さて，4 点 $x(u,v)$, $x(u+\epsilon, v)$, $x(u+\epsilon, v+\epsilon)$, $x(u, v+\epsilon)$ の複比 $\mathcal{C}_\epsilon = \mathcal{C}_\epsilon(u,v)$ を考えよう．$x_u \perp x_v$ であることから $x_u x_v^{-1} = -x_v^{-1} x_u$ となるので，

$$\lim_{\epsilon \to 0} \mathcal{C}_\epsilon = -\frac{g_{11}}{g_{22}} \tag{4.1}$$

となることがわかる．よって，x が双等温曲面であることと

$$\lim_{\epsilon \to 0} \mathcal{C}_\epsilon = -\frac{a(u)}{b(v)} \tag{4.2}$$

が成り立つことは同値である．ここでも，a は u のみによる関数で，b は v のみによる関数である．この双等温曲面の記述は $\tilde{u}$ や $\tilde{v}$ による座標の伸び縮みは含まれていないが，離散的な場合にはこれは不可能なので，定義 4.3 は (4.2) の自然な離散化と思うことができる：離散的な曲面では座標の伸び縮みをすることはできないので，対応する主張は次のようになる．離散的な曲面が双等温曲面であることと，与えられた四角形の頂点 p, q, r, s（この順に並んでいる）に対して，$a_{pq} = a_{rs}$ と $a_{ps} = a_{qr}$ が成り立つように選ぶことができることは同値である．

ボベンコとピンカールによって示された，双等温曲面のもう一つの見方がある：

定理 4.4. $x(u,v)$ を $\mathrm{Im}\mathbb{H} \approx \mathbb{R}^3$ 内の滑らかな曲面とし，対角複比（diagonal cross ratio）を

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^d_\epsilon = & (x(u+\epsilon, v-\epsilon) - x(u-\epsilon, v-\epsilon)) \\ & \times (x(u+\epsilon, v+\epsilon) - x(u+\epsilon, v-\epsilon))^{-1} \\ & \times (x(u-\epsilon, v+\epsilon) - x(u+\epsilon, v+\epsilon)) \\ & \times (x(u-\epsilon, v-\epsilon) - x(u-\epsilon, v+\epsilon))^{-1} \end{aligned}$$

によって定義する．このとき，

$$\mathcal{C}^d_\epsilon = -1 + \mathcal{O}(\epsilon)$$

であることと (u,v) が x の共形的な座標であることは同値であり，

$$\mathcal{C}^d_\epsilon = -1 + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

であることと (u,v) が x の双等温座標であることは同値である．

ここで $\mathcal{C}^d_\epsilon$ の添字に "d" がついているのは，前に出てきた $\mathcal{C}_\epsilon$ とは違い，対角的 (diagonal) な元を用いているためである．また，一般に $f(\epsilon) = \mathcal{O}(\epsilon^k)$ とは，ϵ が 0 に収束するとき，$f(\epsilon)\epsilon^{-k}$ が有界であることを意味する．ここでは，ϵ が 0 に十分近

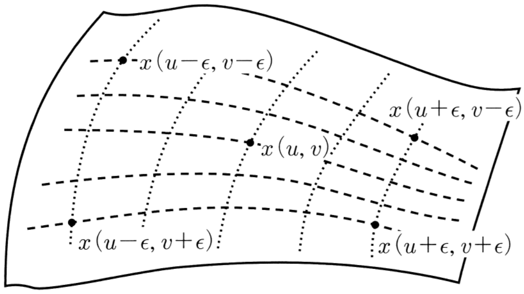


図 3 対角的複比を計算するために定理 4.4 のように対角点をとってある曲面 x．破線は x の u 座標，点線は x の v 座標を表している．

いとき，定数 $M>0$ が存在して，誤差 $|\mathcal{C}^d_\epsilon+1|$ が $M\epsilon^2$ で押さえられることを意味する．

証明. 一般性を失うことなく $x(u,v)=\vec{0}$ と仮定してもよく，このとき，$\rho_u,\rho_v\in\{\pm1\}$ に対して，$x(u+\rho_u\epsilon, v+\rho_v\epsilon)=\epsilon\rho_u x_u+\epsilon\rho_v x_v+\frac{1}{2}\epsilon^2(x_{uu}+x_{vv}+2\rho_u\rho_v x_{uv})+\mathcal{O}(\epsilon^3)$ となり，したがって，$\mathcal{C}^d_\epsilon=x_u x_v^{-1}x_u x_v^{-1}+\epsilon(x_u x_v^{-1}(x_{uv}+x_u x_v^{-1}x_{uv})x_v^{-1}-(1+x_u x_v^{-1})x_{uv}x_v^{-1}x_u x_v^{-1})+\mathcal{O}(\epsilon^2)$ となる．もし座標が共形座標なら，$x_u x_v^{-1}x_u x_v^{-1}=-1$ となり，$\mathcal{C}^d_\epsilon=-1+\epsilon x_u^{-4}(x_u x_v x_{uv}(x_u+x_v)+x_u^2 x_{uv}(x_u-x_v))+\mathcal{O}(\epsilon^2)$ が成り立つ．さて，もし座標が双等温座標なら，第二基本形式において $b_{12}=0$ となり，スカラー値関数 A と B が存在して，

$$x_{uv}=Ax_u+Bx_v$$

となる．このことから，$\mathcal{C}^d_\epsilon=-1+\epsilon\cdot0+\mathcal{O}(\epsilon^2)$ となる． □

この補題から，次のように（狭義の）離散的な双等温曲面を定義するのが妥当であろう：$\mathfrak{f}$ が離散的な双等温曲面であるとは，頂点が $\mathfrak{f}_p,\mathfrak{f}_q,\mathfrak{f}_r,\mathfrak{f}_s$ である任意の四角形に対して，

$$\mathcal{C}_{pqrs}=-1$$

となることである．

しかし，この定義では，T 変換のような変換によって双等温曲面であるという性質は保たれない．したがって，定義 4.3 におけるより広い定義がよりふさわしいものであることが分かってきた．

複比がちょうど -1 であるような離散的曲面は "双等温的にパラメータ付けされている" と思うことができるが，一方で定義 4.3 を満たす複比をもつ離散的曲面 $\mathfrak{f}$ は，滑らかな曲面のように双等温になるように伸縮を行った座標をもつ曲面とみなせる．

ここで離散的な双等温曲面を違った視点から考えてみよう．$(0,0)$, $(\pm1,0)$, $(0,\pm1)$, $\pm(1,1)$, $\pm(1,-1)$ はすべて離散曲面 $\mathfrak{f}$ の定義領域に含まれていると仮定しよう．このとき，$\mathfrak{f}_{(0,0)}$ の**対角的頂点星**（diagonal vertex star）とは 5 点 $(0,0)$, $(1,-1)$, $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$ の像の点集合 $\mathfrak{f}_{(0,0)}$，$\mathfrak{f}_{(1,-1)}$，$\mathfrak{f}_{(1,1)}$，$\mathfrak{f}_{(-1,1)}$，$\mathfrak{f}_{(-1,-1)}$ のこととする．

定理 4.5. 離散双等温曲面の任意の対角的頂点星の 5 つの頂点は共球である．即ち，5 つの頂点は一つの球面にのっている．

この定理の結論は実際，離散的な曲面が双等温的であることと同値であり，このことから，離散的な双等温曲面であるという性質がメビウス変換の下で不変であることが直ちに従う．上の定理に現われる（5 つの頂点を含む）球面は離散双等温曲面の対角的頂点星の**中心的球面**と言う．

$\mathfrak{f}$ が $\mathbb{R}^3\approx\mathrm{Im}H$ 内の離散双等温曲面のとき，$\mathfrak{f}$ のクリストッフェル変換 $\mathfrak{f}^*$（これも再び $\mathbb{R}^3$ に含まれる）を以下のように定義することができる：

定義 4.6. $\mathfrak{f}$ を $\mathbb{R}^3$ 内の離散双等温曲面とする．このとき，$\mathfrak{f}$ の**クリストッフェル変換** $\mathfrak{f}^*$ とは

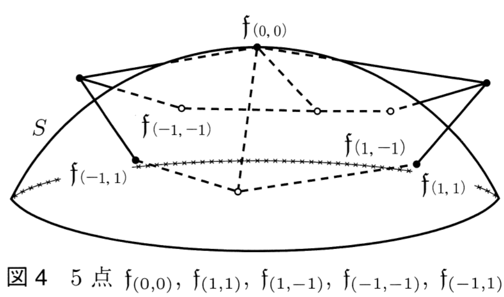


図 4 5 点 $\mathfrak{f}_{(0,0)}$，$\mathfrak{f}_{(1,1)}$，$\mathfrak{f}_{(1,-1)}$，$\mathfrak{f}_{(-1,-1)}$，$\mathfrak{f}_{(-1,1)}$ の対角的頂点星はすべて一つの球面にのり，ここでは S と呼んでいる．定理 4.5 を見よ．

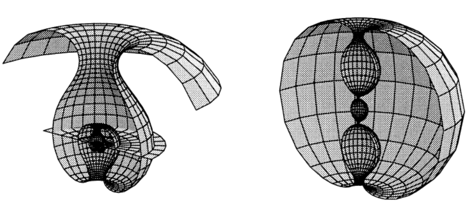


図5　3次元双曲空間 $\mathbb{H}^3$ と3次元球面 $\mathbb{S}^3$ 内の離散的双等温曲面．左は $\mathbb{H}^3$ 内の離散的で極小な回転面である（真中の平面の上下がそれぞれ双曲空間の上半空間モデルのコピーである）．右は $\mathbb{S}^3$ 内の離散的で極小な回転面である（$\mathbb{S}^3$ を立体射影によって $\mathbb{R}^3$ に移して描いている）．

$$d\mathfrak{f}^*_{pq} d\mathfrak{f}_{pq} = a_{pq} \tag{4.3}$$

を満たす曲面である．

ここで，頂点上で定義された任意の関数 $\mathfrak{F}$ に対して，$d\mathfrak{F}_{pq}$ とは，頂点 q と p における $\mathfrak{F}$ の値の差

$$d\mathfrak{F}_{pq} := \mathfrak{F}_q - \mathfrak{F}_p$$

として定義する．

この定義が自然であることを見るために，双等温座標 u, v をもつ $\mathbb{R}^3$ 内の滑らかな曲面のクリストッフェル変換 x^* を考えよう．前節で見たように，滑らかな場合には x と x^* が

$$dx = x_u du + x_v dv\ , \quad dx^* = x_u^{-1} du - x_v^{-1} dv$$

を満たすと仮定してもよい．したがって，

$$dx^*(\partial_u)dx(\partial_u) = 1 \text{ かつ } dx^*(\partial_v)dx(\partial_v) = -1$$

となる．さらに等式 (4.1) により，

$$\lim_{\epsilon \to 0} \mathcal{C}_\epsilon = -1 = \frac{dx^*(\partial_u)dx(\partial_u)}{dx^*(\partial_v)dx(\partial_v)}$$

となる．離散的な曲面の場合，等式 (4.1) の右辺の -1 を，定義 4.3 のように，$q_{pqrs} = a_{pq}/a_{ps}$ の右辺の a_{pq}/a_{ps} に弱めることができる．このため，

$$\frac{a_{pq}}{a_{ps}} = \frac{d\mathfrak{f}^*_{pq} d\mathfrak{f}_{pq}}{d\mathfrak{f}^*_{ps} d\mathfrak{f}_{ps}}$$

を考えることは自然であり，ここで $d\mathfrak{f}_{pq}$, $d\mathfrak{f}^*_{pq}$, $d\mathfrak{f}_{ps}$, $d\mathfrak{f}^*_{ps}$ は $dx(\partial_u)$, $dx^*(\partial_u)$, $dx(\partial_v)$, $dx^*(\partial_v)$ の離散的類似物を表していると考えると，定義 4.6 が自然なものであることがわかる．

このとき，ボベンコとピンカールによって次が示された：

定理 4.7. $\mathfrak{f}$ を離散的な双等温曲面とする．このとき，$\mathfrak{f}$ のクリストッフェル変換 $\mathfrak{f}^*$ が存在する．

定理 4.8. $\mathfrak{f}$ を離散的な双等温曲面とする．このとき，$\mathfrak{f}$ のクリストッフェル変換 $\mathfrak{f}^*$ は $\mathfrak{f}$ と同じ複比をもつ双等温曲面となる．

この記事を読んで双等温曲面，より一般に曲面理論，あるいは離散的な微分幾何学に興味をもった人は以下の文献を参照されたい．

参考文献

1) A. Bobenko and Y. Suris, *Discrete differential geometry, integrable structure*, Graduate Textbooks in Mathematics 98, A.M.S., 2008.
2) U. Hertrich-Jeromin, *Introduction to Möbius differential geometry*, London Mathematical Society Lecture Note Series 300, 2003.
3) T. Hoffmann, *Discrete differential geometry of curves and surfaces*, COE Lecture Note Vol.18: Kyushu University, 2009.
4) H. Hopf, Differential geometry in the large, Lect. Notes in Math. 1000, Springer, Berlin (1983).
5) 井ノ口順一，「可積分な曲面：離散化された微分幾何へ向けて（離散可積分系に関する最近の話題）」，数理解析研究所講究録 **1170** (2000), 9–22.
6) 剱持勝衛，『曲面論講義—平均曲率一定曲面入門』，培風館，2000.
7) 松浦望，「曲面の差分化」，立教 SFR 講究録 No.**8**, 2005.
8) H. Pottmann, A. Asperl, M. Hoffer and A. Kilian, *Architectural Geometry*, Bentley Inst. Press, 2007.
9) W. Rossman, *Discrete constant mean curvature surfaces via conserved quantities*, COE Lecture Note Vol.**25**: Kyushu University, 2010.
10) 梅原雅顕，山田光太郎，『曲線と曲面—微分幾何学的アプローチ』，裳華房，2002.
11) 浦川肇，『ラプラシアンの幾何と有限要素法』，朝倉書店，2009.

（こんどう・たけふみ，神戸大学大学院理学研究科）
（ウェイン・ラスマン，神戸大学大学院理学研究科）

超離散系



礒島　伸

1. 超離散系とは

様々な現象を理解するための数理科学的手法の一つとして微分方程式を用いたモデル化が挙げられます．そのモデルが非線形微分方程式で記述される場合，一般には解を書き下すことができませんが，今日ではコンピュータという強力な道具を用いてその数値解を求めることができます．ところがよく考えてみると微分方程式では独立変数も従属変数も連続な値を取るのに対し，コンピュータは本質的には離散的な値しか扱えません．つまりコンピュータで微分方程式の数値解を求めるとき，実際には独立変数を離散化した差分方程式を解くことになります．何気なく「離散化」という言葉を使いましたが，単に離散化というときは，このような独立変数の離散化を指すのが一般的です．さて，ここで想像力を働かせて，差分方程式の従属変数も離散化することを考えます．この操作が通常の離散化を超える離散化，**超離散化**です．超離散化に成功したとすればすべての変数が離散値を取る系が得られ，これを**超離散系**と呼びます．表 1 のように模式的に考えれば微分方程式と超離散系は差分方程式を介して簡単に結びつきます．しかし具体的には超離散化としてどのような操作を行えばよいのでしょうか．また通常の離散化においては，候補となる差分方程式が無数にある中から微分方程式の解をよく近似するものを採用するのが自然です．超離散化もこれと同様に，解の振舞いなど元の差分方程式の性質を保つ操作になっていなければ意味がありません．次節で紹介する手続きは，適当な条件を満たす差分方程式の従属変数を体系的に離散化でき，しかも元の系の定性的性質を保存することが例証されている，というものです．

表 1　微分方程式，差分方程式，超離散系の比較．

	従属変数	独立変数
微分方程式	連続	連続
差分方程式	連続	離散
超離散系	離散	離散

2. 超離散化の手続き

超離散化を行う対象となる非線形差分方程式，例えば

$$x_{n+1} = (1 + x_n) \div x_{n-1} \qquad (1)$$

といったものを考えます．まず従属変数 x_n を

$$x_n = e^{X_n/\varepsilon} \qquad (2)$$

と指数関数を用いて新しい変数 X_n に置き換えます．ここで ε は正値のパラメータです．こうして変数に ε 依存性を入れた後，**超離散極限**と呼ばれる極限を取ります．これは方程式の両辺に $\varepsilon \log$ をほどこしてから極限 $\varepsilon \to +0$ を取るという特殊な

表 2　差分方程式と超離散系の演算の対応.

差分方程式	×	÷	＋	−
超離散系	＋	−	max	なし

スケール極限です．その結果，一般に表 2 のように差分方程式での掛け算，割り算，足し算はそれぞれ新しい変数に対する足し算，引き算，max 演算に置き換わります．超離散系はこの 3 つの簡単な演算だけからなる **max-plus 代数**で記述される系なのです．演算の対応の証明でポイントとなるのは恒等式

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon\log(e^{A/\varepsilon}+e^{B/\varepsilon})=\max(A,B) \quad (3)$$

ですが，詳しくは文献 1) をご覧下さい．

ここでは方程式 (1) の超離散化を詳しく見ていきましょう．変換 (2) と $1=e^{0/\varepsilon}$ に注意し，表 2 の演算の置き換えを行うと超離散系

$$X_{n+1}=\max(0,X_n)-X_{n-1} \quad (4)$$

が得られます．初期値 X_0, X_1 として整数を選ぶと，すべての n に対して X_n が整数値になることがわかるでしょう．このように初期値を適当に制限することで，従属変数が取る値を離散値に閉じ込めることができるのです．では，元の系の性質を保つ，という点についてはどうでしょう．実は差分方程式 (1) は「任意の初期値問題の解が周期 5 の周期解になる」という性質を持っています．何と，超離散系 (4) もこれと同じ性質を持っているのです．興味のある方は証明に挑戦してみて下さい*1)．

ここで紹介した超離散化は最も基本的なバージョンで，適用にあたって制約があります．指数関数を用いた変換を行うため x_n が正値でなければならないこと，差分方程式の引き算に対応する演算がうまく定義されないため引き算の入らない方程式でなければならないこと，などです．これらの制約の解消に向けて，超離散化の手続きを拡張する研究が進展していることを付け加えておきます．

*1)　(1) に対しては x_0, x_1 を任意に与えて $x_2, x_3, \cdots$ を計算し，$x_5=x_0$, $x_6=x_1$ となることを示します．(4) についても同様ですが X_0, X_1 の符号で場合分けすると考えやすいでしょう．

3. 超離散系の利点

max 演算は見慣れない演算ですが，条件分岐で表現することができます．超離散系ではそれ以外に足し算，引き算しか登場しません．つまり，元の非線形差分方程式を「条件分岐付きの線形方程式」で近似したものが超離散系なのです．この大胆な近似によって超離散系の計算は差分方程式と比べて圧倒的に簡単になっています．特にコンピュータにとっては得意な演算ばかりで，さらに離散値で閉じた系なので数値誤差が生じません．計算が本当に簡単にできる系であること，コンピュータと相性のよい系であることが超離散系の利点です．また，これほど大胆な近似を行ったにも関わらず元の系の定性的な性質が保存されていることがとても大切です．むしろ微分・差分方程式より現象の本質を捉えやすくなったと解釈できる場合もあります．ソリトン方程式に対応する超離散系である**箱玉系**はその代表例と言えるでしょう．興味のある方は文献 2) をご一読下さい．

こうした特長から，超離散系は連続変数を扱う解析学と，離散値を計算するコンピュータをつなぐ架け橋として期待されています．将来，先に述べた超離散化における制約が完全に解消されれば，解析学に直接対応する超離散系の理論を構築できる可能性もあるのです．

筆者が超離散系の研究を始めたとき，超離散化について勉強したのは本稿第 2 節程度の内容だけでした．皆さんは，超離散系の研究に必要な最低限の知識をもう身につけたわけです．皆さんも自分が興味を持っている対象の超離散化を考えてみませんか？

参考文献

1)　広田良吾, 高橋大輔：『差分と超離散』, 共立出版 (2003).
2)　時弘哲治：『箱玉系の数理』, 朝倉書店 (2010).

（いそじま・しん，青山学院大学理工学部）

p 進体上の代数幾何



三枝 洋一

1. 体とその上の代数幾何

代数幾何の研究対象である**代数多様体**は，素朴にはいくつかの（多変数）多項式の共通零点のことである．多項式といえば実数や複素数に係数をとるものを思い浮かべる方が多いかもしれないが，代数においては四則演算（和・差・積・0 でない元による商）が定まった集合である**体**というものを考え，それに係数をとる多項式をしばしば考える．それに合わせて，体 k を一つ決め，k 係数多項式の零点として与えられる「k 上の代数多様体」を研究することもできる．これを **k 上の代数幾何**という．

体の代表格はやはり複素数全体を集めて得られる複素数体 $\mathbb{C}$ であろう．定数でない複素数係数 1 変数多項式は必ず根を持つ（代数学の基本定理）という著しい特徴があるうえ，複素解析という美しい解析の理論も持っているからである．必然，$\mathbb{C}$ 上の代数幾何は深く追究され，多くの成果が挙げられてきた．

有理数全体を集めてできる有理数体 $\mathbb{Q}$ も馴染み深くまた重要な体である．$\mathbb{Q}$ 上の代数多様体は自然に $\mathbb{C}$ 上の代数多様体と見なせる（有理数係数多項式を複素数係数多項式と見ればよい）が，それに加え，その代数多様体に $\mathbb{Q}$ **有理点**（座標が有理数である点）がどのくらいあるかなど，新しい問題も生まれる．これは素朴には有理数係数の多変数連立方程式に有理数解がどれくらいあるかという問題なので，数論と深い関わりがある（例えば，有名なフェルマー予想は $\mathbb{Q}$ 上の代数多様体 $x^n+y^n=1$ に $\mathbb{Q}$ 有理点がどのくらいあるかという問題だと考えられる）．それゆえ，$\mathbb{Q}$ 上の代数幾何は数論にも興味のある研究者によって研究されることが多い．こうした数論と代数幾何の融合した分野はしばしば**数論幾何**と呼ばれている．

その一方で，有限個の元しか持たないちょっと変わった（？）体（**有限体**）もある．p を素数とし，p 個の元からなる有限集合 $\mathbb{F}_p=\{0,1,\dots,p-1\}$ の 2 元 x,y の和・差・積をそれぞれ $x+y$, $x-y$, xy を p で割った余りとして定めると，0 でない任意の元に逆数があることが分かるので，有限体ができる．例えば $\mathbb{F}_7$ において，$3\times5=1$ であるから，3 の逆数は 5 であり，したがって $2\div3=2\times5=3$ である．有限体上の代数幾何ももちろん考えることができ，Weil 予想をはじめとした特有の理論がある．最近は符号理論や暗号などの応用数学とも関係しているようである．有限体上の代数幾何の特徴は，その有理点が有限個であるというところにある．まさに離散的な世界である．

さて，本稿のテーマは p 進体上の代数幾何である．p 進体については次節で説明するが，大雑把に言えば，実数体や複素数体のように解析を用いることが可能であり，かつ有限体とも結び付く二面性を持った体である．それゆえ，p 進体上の代数多様体の研究には，解析を使う連続的な方法と，有限体上の代数幾何に結び付けるという離散的な

方法を同時に用いることができる．これら二つの手法が絡まり合うことで，p 進体上の代数幾何の理論は豊富で魅力あるものとなっている．また，p 進体は数論と深く結び付いた体であるから，その上の代数幾何も数論に多くの応用があり，そのことが研究の動機の一つにもなっている．本稿では，最も基本的な代数多様体の一つである楕円曲線の場合を中心として，p 進体上の代数幾何の独特の魅力をできるだけ分かりやすくお伝えしたいと思う．

2. p 進体

まず，p 進体について簡単に説明しよう．有理数 $x \neq 0$ に対し，$x = p^n a/b$（a と b は互いに素な整数）となる唯一の整数 n を $v_p(x)$ と書き，x の **p 進絶対値** $|x|_p$ を $|x|_p = p^{-v_p(x)}$ で定める（例えば，$|100|_5 = 1/25$, $|100|_7 = 1$ である）．また，$|0|_p = 0$ としておく．p 進絶対値は通常の絶対値と同様に三角不等式 $|x+y|_p \leq |x|_p + |y|_p$ を満たす[*1]ので，p 進絶対値に関する収束や Cauchy 列を考えることができる．一例として，無限和 $1+p+p^2+\cdots$ を考えてみよう．これの部分和を $s_n = 1+p+\cdots+p^n$ とおくと，整数 $1 \leq m \leq n$ に対して $|s_n - s_m|_p = p^{-m}$ となるから，数列 $(s_n)_n$ は Cauchy 列である．また，$|s_n - (1-p)^{-1}|_p = |-p^{n+1}(1-p)^{-1}|_p = p^{-(n+1)} \to 0$ $(n \to \infty)$ であるから，s_n は $(1-p)^{-1}$ に収束する．

有理数体から実数体を構成する方法の一つとして，有理数の Cauchy 列を集める方法が知られているが，それと同様に，有理数の p 進 Cauchy 列を集めることで体ができる（この操作を **p 進完備化**という）．この体を **p 進数体**といい，$\mathbb{Q}_p$ で表す．$\mathbb{Q}_p$ の元を **p 進数**と呼ぶ．特に，有理数は p 進数である．

実数が十進展開で表示できるように，p 進数は次のような整数係数の無限和（**p 進展開**）で一意的に表すことができる[*2]：

$$a_{-n}p^{-n}+\cdots+a_0p^0+a_1p^1+\cdots \quad (0 \leq a_i \leq p-1).$$

例えば，$\mathbb{Q}_3$ における $1/6$ の p 進展開は

$$2 \cdot 3^{-1} + 1 \cdot 3^0 + 1 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^2 + \cdots$$

である．

さて，p 進数 $x \neq 0$ に対し，その p 進展開の p^n の係数が 0 とならないような最小の n を $v_p(x)$ と書き，x の p 進絶対値 $|x|_p$ を $|x|_p = p^{-v_p(x)}$ と定める（やはり $|0|_p = 0$ とする）と，これは以前定めた有理数の p 進絶対値の拡張となっている．$|x|_p \leq 1$ を満たす p 進数 x，すなわち p 進展開に p の負べきが現れない p 進数を **p 進整数**という．分母が p で割れない有理数は p 進整数である．また，2 つの p 進整数の和・差・積はまた p 進整数である（超距離不等式の帰結）．p 進整数全体の集合を $\mathbb{Z}_p$ と書き，**p 進整数環**という．

p 進数体や p 進整数環の性質は，おおまかに次の 2 つにまとめられる．

(解析的性質)：p 進数の Cauchy 列は収束する（完備性）．

(代数的性質)：p 進整数 x に対し，その p 進展開の p^0 の係数を $\overline{x}$ と書く．$0 \leq \overline{x} \leq p-1$ より $\overline{x}$ は $\mathbb{F}_p$ の元とみなせるから，写像 $\mathbb{Z}_p \to \mathbb{F}_p$ が得られるが，これは和・差・積を保つ．つまり，p 進整数 x, y に対して $\overline{x \pm y} = \overline{x} \pm \overline{y}$, $\overline{x \cdot y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$ が成り立つ．$\overline{x}$ のことを $x \bmod p$ とも書く．

これら 2 つの性質は，p 進数の考察に非常に役に立つ．例えば，$\mathbb{Q}_5$ に整数の平方根がどのくらい含まれているかを考えてみよう．$x \in \mathbb{Q}_5$ が 2 の平方根であるならば，$x^2 = 2$ となるので，$|x|_5^2 = |x^2|_5 = |2|_5 = 1$ つまり $|x|_5 = 1$ となる．これより $x \in \mathbb{Z}_5$ であるから，その $\bmod 5$ を考えることができる．（代数的性質）より，$(\overline{x})^2 = \overline{x^2} = \overline{2} = \overline{1+1} = \overline{1} + \overline{1} = 2$ となるから，$\overline{x} \in \mathbb{F}_5$ は $\mathbb{F}_5$ における 2 の平方根である．一方，$\mathbb{F}_5$ の元 0, 1, 2, 3, 4 を 2 乗してみると，

*1) より強く，**超距離不等式** $|x+y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$ が成り立つ．

*2) p 進展開が一意的であることは，p 進数と実数の相違点である．$1.000\cdots = 0.999\cdots$ となるように，実数の十進展開は一意的ではない．

それぞれ 0, 1, 4, 4, 1 となるので，$\mathbb{F}_5$ に 2 の平方根はない．以上から，$\mathbb{Q}_5$ には 2 の平方根は存在しないことが分かる．

一方，-1 の平方根についてはどうだろうか．$\mathbb{F}_5$ に $\overline{-1} = 4$ の平方根が存在するので，今度は平方根が存在する望みがある．ここで，関数 $f(x) = \sqrt{4-x}$ の $x = 0$ でのテイラー展開

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{64}x^2 - \frac{1}{512}x^3 - \cdots$$

を考えよう．これの両辺に形式的に $x = 5$ を代入すると $\sqrt{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n 5^n$ となるので，$\mathbb{Q}_5$ において右辺が収束するならば，その収束先は -1 の平方根を与えると考えられる（実際にそうであることを示すのも難しくない）．さて，x^n の係数 $a_n = f^{(n)}(0)/n!$ を計算すると，

$$-\frac{(2n-2)!}{2^{4n-2}n!(n-1)!} = -\frac{{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1} - {}_{2n-2}\mathrm{C}_n}{2^{4n-2}}$$

となる．これは分母が 2 のべきである有理数であるから $\mathbb{Z}_5$ の元である．このことから，整数 $1 \leq m \leq n$ に対し

$$|a_{m+1}5^{m+1} + \cdots + a_n 5^n|_5 \leq |5^{m+1}|_5 = 5^{-m-1}$$

となるので，級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n 5^n$ の部分和は Cauchy 列である．したがって（解析的性質）より，この級数はある 5 進数に収束することが分かり，$\mathbb{Q}_5$ 内に -1 の平方根が存在することが結論される．

ここまでの考察からも分かるように，$\mathbb{Q}_p$ は有理数以外にも多くの元を持つ．しかし，全ての非定数一変数 $\mathbb{Q}_p$ 係数多項式が根を持つわけではない（$\mathbb{Q}_5$ において $T^2 - 2$ に根がないことは既に見た通りである）．そこで，$\mathbb{Q}_p$ 内に根を持たない多項式 $f(T)$ を選んでその根を付け加えるという操作をすることで，$\mathbb{Q}_p$ よりも大きな体（**拡大体**）を構成することができる．これはちょうど実数体に -1 の平方根を付け加えて複素数体を構成するのと同じ操作である．このような操作を有限回繰り返して得られる体が表題にある ***p* 進体**である．一般の p 進体も p 進数体 $\mathbb{Q}_p$ とよく似た性質を持つので，まとめて扱うことも多いのだが，本稿では簡単のため p 進数体のみを考えることにする．

3. *p* 進体上の楕円曲線

ここでは，楕円曲線を題材として，p 進体上の代数幾何特有の雰囲気を味わってみよう．k を体とし，簡単のため，k において $2, 3 \neq 0$ であると仮定する．k 上の**楕円曲線**とは，

$$E\colon Y^2Z = X^3 + aXZ^2 + bZ^3 \quad (a, b \in k)$$

という斉次方程式で与えられる射影平面曲線で $4a^3 + 27b^2 \neq 0$ を満たすもののことである．「射影平面曲線」とは，比 $[X : Y : Z]$ $((X, Y, Z) \neq (0, 0, 0))$ で上の方程式を満たしているものを考えるということである．これを通常の座標平面と関連付けるためには，$Z \neq 0$ としてみるとよい．このとき $[X : Y : Z] = [X/Z : Y/Z : 1]$ であるから，比を与えることと 2 つの数 $x = X/Z$, $y = Y/Z$ を与えることは同じである．E の方程式の両辺を Z^3 で割ると $y^2 = x^3 + ax + b$ となるので，E のうち $Z \neq 0$ の部分は平面曲線 $y^2 = x^3 + ax + b$ と同一視できることが分かる．一方，E の方程式で $Z = 0$ とすると $X^3 = 0$ となるので，E のうち $Z = 0$ の部分は一点 $[0 : 1 : 0]$ となる．つまり，楕円曲線 E は，平面曲線 $y^2 = x^3 + ax + b$ に**無限遠点** $O = [0 : 1 : 0]$ を付け加えたものと解釈できる．なお，条件 $4a^3 + 27b^2 \neq 0$ は射影平面曲線が特異点を持たないという条件に相当する．

k 上の楕円曲線 E に対し，E の k 有理点の集合を $E(k)$ と書く．これは，E の方程式を満たす比 $[X : Y : Z]$ のうち，$X, Y, Z \in k$ となるものを集めてきたものである．楕円曲線の最も著しい特徴の一つは，$E(k)$ に和を定めることができるということである．$P, Q \in E(k)$ の和 $P + Q$ は次のように与えられる：P, Q を通る直線[*3)] と E の交点を R とし，O, R を通る直線と E の交点を $P + Q$ と定める．$k = \mathbb{R}$ の場合には，図 1 の通りである．

k が $\mathbb{C}$ や $\mathbb{Q}_p$ などの場合にはもはや図は描けないが，「直線」や「交点」はいずれも方程式に

*3) $P = Q$ の場合は，P における接線を考える．

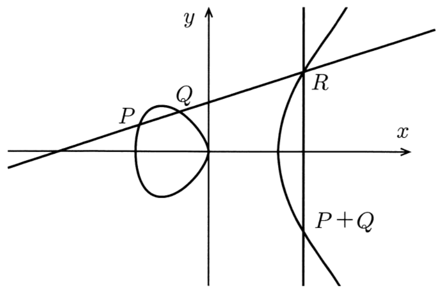


図 1

よって解釈することができるので問題は起こらない．和の定義より，$P+O=P$ となる．また，$P\in E(k)$ に対し，P,O を通る直線と E の交点を $-P$ と定めると，$P+(-P)=O$ となることも分かる．整数 $n\geq 1$ に対し，$nP=\underbrace{P+\cdots+P}_{n\text{ 個}}$, $E(k)[n]=\{P\in E(k)\mid nP=O\}$ とおく．

さて，$\mathbb{Q}_p$ 上の楕円曲線 $E\colon Y^2Z=X^3+aXZ^2+bZ^3$ を考えよう．さらに $a,b\in\mathbb{Z}_p$ と仮定する．このとき，係数の $\bmod p$ を考えることで有限体 $\mathbb{F}_p$ 上の射影代数曲線 $\overline{E}\colon Y^2Z=X^3+\overline{a}XZ^2+\overline{b}Z^3$ が得られる．$P=[X:Y:Z]\in E(\mathbb{Q}_p)$ に対し，それを $\bmod p$ した点 $\overline{P}=[\overline{X}:\overline{Y}:\overline{Z}]$ を考えたい．このようなことができるためには，X,Y,Z が p 進整数でなければならず，さらに $\overline{X}=\overline{Y}=\overline{Z}=0$ であってはならない．そこで，n を $v_p(X),v_p(Y),v_p(Z)$ の最小値とし，X,Y,Z を $p^{-n}X,p^{-n}Y,p^{-n}Z$ に置き換えてから $\bmod p$ をとればよい．このとき，明らかに $\overline{P}\in\overline{E}(\mathbb{F}_p)$ であるから，写像 $\mathrm{sp}\colon E(\mathbb{Q}_p)\to\overline{E}(\mathbb{F}_p)$（**特殊化写像**）が誘導される．$\overline{E}(\mathbb{F}_p)$ は有限集合であるから，この写像によって $E(\mathbb{Q}_p)$ が離散的な対象と関連付けられたことになる．

特殊化写像によってどのくらい情報が失われるかを考えよう．そのためには，特殊化写像で $\overline{O}=[0:1:0]\in\overline{E}(\mathbb{F}_p)$ にうつされる元の集合 $\mathrm{sp}^{-1}(\overline{O})$ を考察すればよいと思われる．この集合をもう少し具体的に記述しよう．比 $[X:Y:Z]$ が $\mathrm{sp}^{-1}(\overline{O})$ に属するならば $Y\neq 0$ である（そうでなければ $\mathrm{sp}([X:Y:Z])$ の第二成分は 0 になる）．よって，はじめから $Y\neq 0$ の部分に制限して考えればよい．$z=X/Y,w=Z/Y$ とおくと，E のうち $Y\neq 0$ の部分は $w=z^3+azw^2+bw^3$ となる．また，$\mathrm{sp}([z:1:w])=[0:1:0]$ は $z,w\in\mathbb{Z}_p$ かつ $\overline{z}=\overline{w}=0$ であること，すなわち $z,w\in p\mathbb{Z}_p$ と同値である．つまり，$\mathfrak{m}=p\mathbb{Z}_p=\{z\in\mathbb{Q}_p\mid |z|_p<1\}$ とおくと，$\mathrm{sp}^{-1}(\overline{O})$ は

$$\bigl\{(z,w)\in\mathfrak{m}^2\mid w=z^3+azw^2+bw^3\bigr\}$$

と同一視できる．さらに，方程式 $w=z^3+azw^2+bw^3$ を用いると，w は z の $\mathbb{Z}_p$ 係数べき級数

$$w=f(z):=z^3+a_4z^4+a_5z^5+\cdots\quad(a_i\in\mathbb{Z}_p)$$

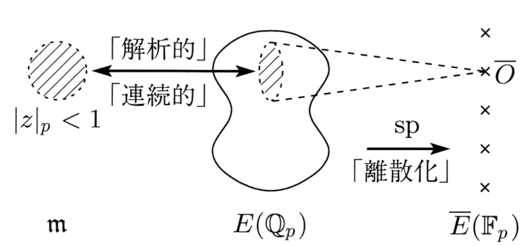
で表すことができる（陰関数定理の類似）．$|z|_p<1$ ならば $|f(z)|_p<1$ であることに注意すると，次の全単射が得られる：

$$\mathfrak{m}\xrightarrow{\cong}\mathrm{sp}^{-1}(\overline{O});z\mapsto\bigl(z,f(z)\bigr).$$

この全単射には z のべき級数が現れるので，$\mathbb{Q}_p$ の連続的・解析的側面が反映されていると見ることができる．前節における，$\mathbb{Q}_5$ 内に -1 の平方根が存在することの証明との類似にも注目していただきたい．

ここまでの話を簡単にまとめておこう．

- 特殊化写像によって，$E(\mathbb{Q}_p)$ は離散的な世界の対象 $\overline{E}(\mathbb{F}_p)$ と関係を持つ．
- 特殊化写像によって失われる情報は，連続的（解析的）手法により，$\mathfrak{m}=\{z\in\mathbb{Q}_p\mid |z|_p<1\}$ という分かりやすい集合と同一視できる．



なお，上の議論で出てきた $\mathfrak{m}$ や $\mathrm{sp}^{-1}(\overline{O})$ はもはや代数多様体ではなく，また $z\mapsto(z,f(z))$ も多項式や有理式では与えられない．現在では，この

ような空間や写像を扱うための幾何学的枠組みも整えられており，**リジッド幾何学**と呼ばれている．

$\mathrm{sp}^{-1}(\overline{O}) \subset E(\mathbb{Q}_p)$ は和について閉じている．次はこの和について考察しよう．$z \in \mathfrak{m}$ に対し，$P_z = (z, f(z)) \in \mathrm{sp}^{-1}(\overline{O})$ とおく．$z, z' \in \mathfrak{m}$ とすると $P_z + P_{z'} \in \mathrm{sp}^{-1}(\overline{O})$ であるから，ある $z'' \in \mathfrak{m}$ が存在して $P_z + P_{z'} = P_{z''}$ となる．z'' は z と z' から決まるわけだが，少し計算をしてみると，z'' は以下の形をした z と z' のべき級数で表せることが分かる：

$$z'' = g(z, z') = z + z' + \sum_{i,j \geq 1} g_{ij} z^i z'^j$$
$$(g_{ij} \in \mathbb{Z}_p, g_{ij} = g_{ji}).$$

$\mathfrak{m}$ にこのようなべき級数によって和が定まったものを**形式群**と呼ぶ．形式群は楕円曲線と比べてはるかに扱いやすい対象であるが，p 進体の研究において極めて重要であることが分かっている．例えば，やや専門的な話になるが，p 進体に対する局所類体論や，その一般化である局所ラングランズ対応を構成する際に中心的な役割を果たす．

さて，$z \in \mathfrak{m}$ に対して

$$g_1(z) = z,\ g_n(z) = g(g_{n-1}(z), z) \quad (n \geq 2)$$

として帰納的に $g_n(z) \in \mathfrak{m}$ を定めると，$g_n(z)$ は z のべき級数であり，$P_{g_n(z)} = nP_z$ が成り立つ．形式群の理論より，$g_n(z)$ に対して次のようなことが分かる：

- べき級数 $g_n(z)$ の定数項は 0，z の係数は n である．
- べき級数 $g_p(z)$ の係数のうち，p^k 次 $(k \geq 1)$ の項以外の係数は $p\mathbb{Z}_p$ に属する（$\mathbb{F}_p$ 上の形式群に対する高さの存在）．

「形式群の理論」と書いたが，これらの証明は極めて初等的である．前者については n についての帰納法を用いればよい．後者は $p(P_z + P_{z'}) = pP_z + pP_{z'}$ に相当する関係式 $g_p(g(z, z')) = g(g_p(z), g_p(z'))$ より従う[*4]．

[*4] z, z' を変数とみなし，形式的に両辺を z' で微分した後に $z' = 0$ を代入すると，$g'_p(z)$ の係数が全て $p\mathbb{Z}_p$ に属することが分かる．

この事実を用いると，n が p と互いに素であるとき，$z \in \mathfrak{m}$ が $g_n(z) = 0$ を満たすならば $z = 0$ であることが分かる．実際，$g_n(z) = nz + a_2 z^2 + \cdots$ と書くと，$z \neq 0$ のとき $-n = a_2 z + a_3 z^2 + \cdots$ となるが，右辺は $\mathfrak{m}$ の元であり，左辺は $\mathfrak{m}$ の元でないので不合理である．また，$p \geq 3$ のときには，同様のことが $n = p$ の場合にも成り立つ．今度は，等式 $-p = a_2 z + a_3 z^2 + \cdots$ において，$p \geq 3$ より $a_2 \in p\mathbb{Z}_p$ であるから，右辺の各項は $p^2\mathbb{Z}_p$ の元である．一方，左辺は $p^2\mathbb{Z}_p$ の元でない．

全単射 $\mathfrak{m} \cong \mathrm{sp}^{-1}(\overline{O})$ で対応する主張は次のようになる：

> **定理 1** 整数 $n \geq 1$ が p と互いに素であるか，または $n = p \geq 3$ であるとき，$\mathrm{sp}^{-1}(\overline{O}) \cap E(\mathbb{Q}_p)[n]$ は O のみからなる．

この定理はかなり有力であり，これから面白い結果をいくつか導くことができる．

> **定理 2** $p \geq 5$ かつ，$\overline{E}$ が $\mathbb{F}_p$ 上の楕円曲線である（すなわち，$\overline{4a^3 + 27b^2} \neq 0$）と仮定する．このとき，$p$ と互いに素な整数 n に対し，$\mathrm{sp}\colon E(\mathbb{Q}_p)[n] \to \overline{E}(\mathbb{F}_p)[n]$ は全単射である．

全射性はさほど難しくない．単射性は定理 1 の帰結である．実際，$P, Q \in E(\mathbb{Q}_p)[n]$ に対して $\mathrm{sp}(P) = \mathrm{sp}(Q)$ とすると，$\mathrm{sp}(P - Q) = \mathrm{sp}(P) - \mathrm{sp}(Q) = \overline{O}$ であることが直ちに分かり，したがって $P - Q \in \mathrm{sp}^{-1}(\overline{O}) \cap E(\mathbb{Q}_p)[n]$ なので $P - Q = O$ すなわち $P = Q$ である．この定理を用いると，例えば $E(\mathbb{Q}_p)[n]$ の元の個数を有限回の手続きで求めることができる．

整数論への応用としては，次のようなことが証明できる：

> **定理 3** $E\colon Y^2Z = X^3 + aXZ^2 + bZ^3$ $(a, b \in \mathbb{Z})$ が $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線を与えるとし，$P = [x : y : 1] \in E(\mathbb{Q})$ がある整数 $n \geq 1$ に対して $nP = O$ を満たすとする．このとき，有理数 x, y の分母には 2 のべきしか現れない．

証明は非常に簡単である．$p \geq 3$ とし，x, y の分

母が p で割り切れたとしよう．このとき sp の定義から，$\mathrm{sp}(P)$ は $[*:*:0]$ という形である．$\overline{E}(\mathbb{F}_p)$ の元でこの形のものは $\overline{O}=[0:1:0]$ のみであるから，$P\in \mathrm{sp}^{-1}(\overline{O})$ を得る．$n=p^k n'$（n' は p と互いに素）と書いて $n'P, pn'P, \ldots, p^{k-1}n'P \in \mathrm{sp}^{-1}(\overline{O})$ を考える．$p(p^{k-1}n'P)=p^k n'P=O$ と定理1より，まず $p^{k-1}n'P=O$ が従う．同様の議論により，$p^{k-2}n'P,\ldots,pn'P,n'P,P$ が O と一致することが順に導かれ，P の形に反する．

定理1を $p=2$ の場合にもう少し精密化することで，定理3において実は $x,y\in\mathbb{Z}$ となることも証明できる．さらにちょっとした計算を行うことで，与えられた E に対して，何倍かすると O になる $P\in E(\mathbb{Q})$ を有限回の手続きで全て求めるアルゴリズムをつくることもできる（**Lutz–Nagell の定理**）．

4. エタールコホモロジー

最後に，前節の内容の一つの高次元化として，筆者の専門でもある**エタールコホモロジー**について簡単に紹介したい．X を $\mathbb{Q}_p$ 上の射影代数多様体とし，ℓ を p と異なる素数とするとき，X の ℓ 進エタールコホモロジー $H^i(X_{\overline{\mathbb{Q}}_p},\mathbb{Q}_\ell)$ というものを考えることができる．これは有限次元 $\mathbb{Q}_\ell$ ベクトル空間であり，$\mathbb{Q}_p$ の絶対 Galois 群 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$（$\overline{\mathbb{Q}}_p$ は $\mathbb{Q}_p$ の代数閉包）が連続に作用する．X が楕円曲線 E の場合には，$H^1(E_{\overline{\mathbb{Q}}_p},\mathbb{Q}_\ell)$ は E の **$\boldsymbol{\ell}$ 進 Tate 加群** $T_\ell E=\varprojlim_n E(\overline{\mathbb{Q}}_p)[\ell^n]$ の双対と同型なので，前節の話題とも関連性がある．エタールコホモロジーは通常の空間におけるコホモロジーの理論の代数多様体版なので，代数多様体そのものの研究にとっても重要であるし，Galois 表現を中心に据えた最近の整数論においても必要不可欠な道具である．整数論への応用においては，特に $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ が $H^i(X_{\overline{\mathbb{Q}}_p},\mathbb{Q}_\ell)$ にどのように作用するかを X の幾何学を用いて理解することが中心的な問題となる．

まず，定理2の一般化を紹介しよう．X は特異点を持たないとし，さらに X を「$\mathrm{mod}\,p$」して得られる $\mathbb{F}_p$ 上の代数多様体 $\overline{X}$ も滑らかであると仮定する*5)．このとき，$H^i(X_{\overline{\mathbb{Q}}_p},\mathbb{Q}_\ell)$ と $H^i(\overline{X}_{\overline{\mathbb{F}}_p},\mathbb{Q}_\ell)$ は同型であり，$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ の $H^i(X_{\overline{\mathbb{Q}}_p},\mathbb{Q}_\ell)$ への作用は $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$ の $H^i(\overline{X}_{\overline{\mathbb{F}}_p},\mathbb{Q}_\ell)$ への作用と対応する．後者の作用は，$\overline{X}$ の有理点を数えるという離散的な方法によって調べることができるので（**Lefschetz 跡公式，Weil 予想**），この場合にはコホモロジー $H^i(X_{\overline{\mathbb{Q}}_p},\mathbb{Q}_\ell)$ を十分に理解できたと考えられる．

$\overline{X}$ が特異点を持つ場合には，X 上のコホモロジーの計算を $\overline{X}$ に「押し付けて」得られる，**隣接輪体** $R\psi\mathbb{Q}_\ell$ という $\overline{X}$ 上の層の複体を考えると，$H^i(X_{\overline{\mathbb{Q}}_p},\mathbb{Q}_\ell)\cong H^i(\overline{X}_{\overline{\mathbb{F}}_p},R\psi\mathbb{Q}_\ell)$ となり，問題が $R\psi\mathbb{Q}_\ell$ の計算と，それを係数に持つ $\mathbb{F}_p$ 上の代数多様体 $\overline{X}$ のコホモロジーの計算という二段階に分けられる．さらに Berkovich による**形式隣接輪体**の理論により，$R\psi\mathbb{Q}_\ell$ の計算にはリジッド幾何を利用することができる（連続的側面！）．例えば，閉点 $x\in\overline{X}$ における $R^i\psi\mathbb{Q}_\ell$ の茎は x の管状近傍 $\mathrm{sp}^{-1}(x)$（X の部分リジッド空間）の i 次エタールコホモロジーと同型である．この計算方法と，前節での議論との相同性は明らかであろう．

近年の整数論，特にラングランズ対応周辺の進歩は目覚ましいものがあるが，その中核の一つである**志村多様体**のエタールコホモロジーの計算においては，まさに上のような方針が用いられている．連続的な部分（リジッド空間）としては Rapoport–Zink 空間，離散的な部分（有限体上の代数多様体）としては井草多様体と呼ばれる幾何学的対象が現れ，それらのエタールコホモロジーを組み合わせることで志村多様体のエタールコホモロジーが記述されるのである*6)．前節で述べたような素朴な考え方が，エタールコホモロジーという仕組みを通して高度に洗練され，数論の困難な未解決問題にも通用しうる最先端の技術へと進化したことに，強い魅力を感じずにはいられない．

（みえだ・よういち，九州大学大学院数理学研究院）

*5) 代数多様体の「$\mathrm{mod}\,p$」の仕方は一通りではないので，この記述は不正確である．

*6) Harris-Taylor, Mantovan による．

離散非同期観測データ間の共分散推定

林　高樹

1. はじめに

周知の通り，対のデータ $(x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$ が与えられているとき，それらのデータ間の（標本）共分散 CV は，

$$CV = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}), \tag{1}$$

（標本）相関係数 R は

$$R = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}}$$

にて定義される．但し，$\overline{x}, \overline{y}$ は標本（単純）平均を表す．式 (1) において，標本数 n の代わりに，$(n-1)$ で割ることもある．

それでは，データが完全でないケース，すなわち，どちらか一方が欠け，完全な対で観測されていない場合は一体どうしたら良いだろうか？ しかも，データの採取間隔が不規則な状況において？本稿は，その方法論について，時系列データ，特に連続時間（continuous-time）において連続状態空間（continuous state-space）上を変動する確率過程の**離散時点観測**（discrete-time sampling）を用いた，確率過程間の“共分散”に対する統計的推測問題として考えてゆくことにする*1)．

本稿では，x_i, y_i のデータのサイズが異なる状況，**非同期**＋離散時点観測の状況に興味を持つことから，標準偏差の積で割って基準化する前，すなわち相関係数ではなく共分散に絞って話を進めることにしよう．

方法論について話を始める前に，なぜそのような非同期観測における共分散推定が問題となるのか，その具体的応用分野について触れておきたい．

近年利用の急拡大している，1 日内の金融証券市場取引を記録したデータ，いわゆる**高頻度データ**は，約定や気配などの価格と，それらの発生，記録された時刻（“タイムスタンプ”），それに付随する各種取引情報（例えば，約定方式—“板寄せ” 方式か “ザラ場” 方式かなど）からなる．国内株式市場の寄付や引け，売買中断直後を除いた時間帯の売買は，取引が逐次，非規則的に行われる “連続オークション方式” の典型である．そのような市場において個別の売買を記録した “超” 高頻度データ（ultra high-frequency)，**ティックバイ・ティック・データ**（tick-by-tick data）は，タイムスタンプが不規則に並んでいるため，古典的な統計的方法論，時系列解析における離散データに対するモデリング手法や分析法をそのまま利用するのが適切とは限らない．特に，そのような超高頻度の 2 系列データ間の共分散や相関を計測しようとするときには，その 2 系列間の非同期性の問題が現れてくるのである．本稿では，データ間の観測幅が時間的に短いケース，すなわち，観測時点列 (t_i) として，最大観測幅 $\Delta = \max_i(t_i - t_{i-1})$

*1) 最近の研究では，より一般の，飛躍（ジャンプ）を含む確率過程まで対象を広げて議論がなされているが，本稿ではそこまで一般化しない．

が小さいケース，特に統計的方法論を考える上で $\Delta \to 0$ となる漸近的設定を念頭に置きながら議論を進めることにする．

2. 高頻度データによる共分散の計測

さて，高頻度で記録された2証券間の価格・収益率のような時系列データがあった場合に，その共分散は一体どのように計測されるのであろうか？過去10年余りで金融計量経済分野の一大研究分野に成長した実現ボラティリティ分野においては，現在，高頻度時系列データを，連続時間**拡散過程**（diffusion process）が，離散時点でサンプルされたものと見なして統計解析を進めるアプローチが取られる．本稿でも，この枠組みに従うことにしよう．

ところで，本稿で取り上げるデータの非同期性の問題に対処するための古典的なアプローチとしては，"連続時間拡散過程＋離散時点観測" ではなく，最初から離散時間モデルから生成されたデータ，特に，2次元の正規分布からの *i.i.d.* データのペアの一方が規則的・非規則的に欠損していると見ることで，最尤法やベイズ法に基づいて共分散を推定する方法論もある．例えば，文献12) 等を見よ．

実現共分散

まず，2つの高頻度データが同期観測されるケースを考えよう．いま，時点 t における証券の価格を P_t^1, P_t^2 とし，それらの対数値を X_t^1, X_t^2 で表す．そして，各々が次のような拡散過程に従うと仮定する．

$$dX_t^l = \mu_t^l dt + \sigma_t^l dW_t^l,\ 0 \le t \le T, l = 1, 2, \quad (2)$$

ここで，W_t^1, W_t^2 は，相関を持つブラウン運動であり，$E\left[dW_t^1 dW_t^2\right] = \rho_t dt,\ \rho_t \in [-1, 1]$ はランダムな未知の確率過程とする．μ_t^l は（ランダムな）ドリフト係数，σ_t^l はランダムな拡散係数の確率過程であり，未知または既知とする（$l = 1, 2$）．$\mu_t^l,\ \sigma_t^l,\ \rho_t$ は確率微分方程式 (2) を成立させるのに十分に正則であるとする．説明上の簡便のため，σ^l, ρ は W^l とは独立であるとするが，一般論では（将来の値に依存しなければ）互いに従属していてもよい．

いま，離散時点 (t_i) において，2つの証券の対数価格のペア $(X_{t_i}^1, X_{t_i}^2)$ が観測されるとすると，**実現共分散**（realized covariance）は，次のように定義される：

$$RCV = \sum_{i: t_i \le T} (X_{t_i}^1 - X_{t_{i-1}}^1)(X_{t_i}^2 - X_{t_{i-1}}^2). \quad (3)$$

このとき，計測時点 T が固定の下（例えば，$T = 1$ 日），最大観測区間幅 $\Delta = \max_i(t_i - t_{i-1})$ がゼロに向かうに従い，RCV は2つの拡散過程 X_t^1, X_t^2 の2次共変動（quadratic covariation）$\left[X^1, X^2\right]_T$，または累積共分散（integrated covariance, ICV）

$$\left[X^1, X^2\right]_T = \int_0^T \sigma_t^1 \sigma_t^2 \rho_t dt$$

に確率収束する（"$\xrightarrow{P}$" と書く）ことは，確率解析学における基本的な結果である7)．ICV を未知の興味ある量だとすれば，推定量 RCV の ICV に対する，統計学で "一致性" と呼ばれる性質である．ICV は一般にランダムであっても良く，実証的にボラティリティが時間的に変動すると考えられる金融データにおいてはそのほうが自然である．また，ドリフト項がゼロのケース（$\mu_t^l = 0, l = 1, 2$）では，RCV は ICV の "不偏推定量" になっていることも簡単に確認される．

特別なケースとして，1次元（$X^1 \equiv X^2$）の場合が考えられるが，このとき，RCV は**実現ボラティリティ**（realized volatility, 以下 RV と書く），または（より正確には）**実現分散**（realized variance）と呼ばれる．これが累積分散（integrated variance, IV）$\left[X^1, X^1\right]_T = \int_0^T \left(\sigma_t^1\right)^2 dt$ に対する一致推定量となることは RCV と同様である．

なお，この RCV を各確率過程の実現ボラティリティ（RV^1, RV^2）の積（の平方根）で除せば**実現相関**（realized correlation）

$$RCR = \frac{RCV}{\sqrt{RV^1 \times RV^2}}$$

が定義される．拡散係数，および相関係数が定数（$\sigma_t^l = \sigma^l > 0,\ l = 1, 2,\ \rho_t = \rho$）の場合には，$RCR$ は定数 ρ に対する一致推定量となることが分かる．

なお，RV/RCV の推定誤差は，追加的な正則条件を与えると漸近（混合）正規性を持つことも知られている．漸近分布を求めることは，区間推定や仮説検定などの統計的推測を遂行する上で必要であり，数理統計学の立場からは大事なステップである．

説明上の便宜のため，1次元（$RCV \equiv RV$）で，等間隔サンプリング（$\Delta = T/n$）のケースを取り上げよう．このとき，サンプル数 $n \to \infty$ に伴い，RV は次のような漸近混合正規性を持つ：近似的に，$\left(\sigma_t^1\right)$ を与えた下で（条件付）正規分布に従う，

$$RV \dot{\sim} N\left(IV, \frac{2}{n}\int_0^T \left(\sigma_t^1\right)^4 dt\right).$$

ところで，この漸近正規性を実際の統計的推論に用いる際には，RV の IV に対する推定誤差を $\sqrt{n}$ 倍した量の漸近分散（$2\int_0^T \left(\sigma_t^1\right)^4 dt$ "4乗量", quarticity）が未知であることに注意し，これを良く近似する推定量が必要である．この4乗量を推定するための一致統計量としては，"実現4乗量"（realized quarticity）

$$RQ = \frac{n}{3}\sum_{i=1}^{n}\left(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}\right)^4$$

がある．すなわち，真の漸近分散（4乗量）を RQ に置き換えても，RV の誤差の漸近分布としてやはり正規分布が得られる．なお，RQ は，"実現べき変動"（realized power variation）と呼ばれる統計量のクラスの特別なケースである．これらは RV より派生した研究分野で，近年やはり大きく進展している[2)]．

従来の日次ボラティリティ推定法が長い期間の日次データを必要としたのに対し，RV/RCV の方法論は，たった1日のデータのみでも高頻度でありさえすれば良く，しかも高頻度であるほどより "正確に" ボラティリティ・共分散を観察することができるという点で画期的であった．しかも，GARCH などボラティリティに関するモデル構造の仮定がなくともそれが可能なのである．その理論的基盤は，数理統計学において，実は80年代から90年代初頭にかけて確率過程に対する統計的推測に関する研究の中で既に確立されていたが，90年代も後半に入り，実務界・学界双方において高頻度データの使用が普及する中で，RV/RCV として提唱され，その有用性が認知され，これらに関する研究が急速に進展した．現在，金融計量経済分野における主要研究分野の一つとなっている．

ボラティリティ研究の主要な用途は，金融リスク管理であり，そのベースとなる将来ボラティリティの予測である．RV/RCV 研究においても，1日ごとの高頻度データによって計測された日次 RV を複数日集めることで RV 時系列を作り，長期記憶性などの特性を調べたり，RV 時系列に自己回帰型モデルをフィットさせて予測を行うなどの研究もなされている[1)]．

ところで，$RCV(3)$（$\div$ 標本数 n）と標本共分散 (1) を $x_i = X_{t_i}^1 - X_{t_{i-1}}^1$ 等としながら比べると，$\overline{x} \approx 0, \overline{y} \approx 0$ であるような場合には両者の値は大体等しくなるが，そうでない一般の場合には両者は別物であることが分かる．我々の念頭にある "高頻度サンプリング"（T 一定，$n \to \infty$ の状況）においては，拡散係数や相関係数の一定性の有無の仮定に関わらず，（少なくとも）その累積共分散 ICV への一致性ゆえ RCV の使用が正当化されることに注意されたい．特に，高頻度（同期）サンプリングにおいて，ペア (x_i, y_i) が $i.i.d.$ データと見なせない場合，すなわち，分散共分散が時間と共に変化したり，分散共分散が過去に依存するような拡散過程が（等間隔または非等間隔で）離散時間サンプリングされた場合には，RCV が使うべき推定量である．

なお，ここで解説している RV/RCV を中心とする分散・共分散推定の方法論のベースとなっているのは，確率解析における2次変動（quadratic variation）に関する結果であることを付け加えて

おく．そして，これらの推定問題は，確率微分方程式に関する統計的推測問題の特別な場合に他ならない．興味のある読者は，例えば，文献 14) を参照せよ．

非同期共分散推定量

上述の通り，RCV (3) の計算には，2 系列に対するペアのデータセット $\{(X^1_{t_i}, X^2_{t_i})\}$ の用意が前提であるため，非等間隔にデータが並んだティック・バイ・ティック・データを用いる際には，あらかじめそれらを同時点となるように変換する作業，"同期化" を行わなければならない．これは，標本共分散（したがって，標本相関）の計算においても同様である．それには，まず 1 分間，5 分間といった等間隔上に並んだグリッドをあらかじめ定め，その時点に対応する値を補間することが通常行われる．補間方法には，主なものとして，グリッドから見て最も直前に発生した取引値を持ってくる "直前ティック補間" (previous-tick interpolation）と，各グリッドを挟み込む直前直後の取引の値から線形に値を代入する線形補間（linear interpolation）がある．このような同期化は推定に際して "同期化バイアス" を混入させることにつながる．補間方法やグリッド間隔の選択は分析者に任され，異なる選択ごとに異なる計測結果が導かれてしまうという実用上の課題も生ずる*2)．筆者は東大吉田朋広教授と共同で，非同期的に観測される 2 つの高頻度時系列データに対して，同期化せずに共分散を推定する方法を提案した5)．

いま，2 つの連続拡散過程 X^1, X^2 に対して，(S^i), (T^j) が各々のサンプリング時点を表す増加列であるとする（$S^0 = T^0 = 0$）．ある $T > 0$ を観測の打ち切り時点とする．簡単のため，(S^i), (T^j) は X^1, X^2 とは独立であるとする（これは拡張可能である）．観測区間を $I^i = [S^{i-1}, S^i)$, $J^j = [T^{j-1}, T^i)$ と表記する．さらに，時点 T までの最大観測間隔 Δ がゼロに（確率）収束する状況を考える．ここで，(I^i) と (J^i) との関係には制約を与えない．したがって，両者が同一なケース（$I^i \equiv J^i$），すなわち，完全同期観測のケースも含まれる．

次のような統計量を考える（"Hayashi–Yoshida 推定量"）：

$$HY = \sum_{i:S^i \le T} \sum_{j:T^j \le T} \left(X^1_{S^i} - X^1_{S^{i-1}}\right) \times \left(X^2_{T^j} - X^2_{T^{j-1}}\right) 1_{\{I^i \cap J^j \neq \emptyset\}}. \quad (4)$$

ここで，1_A は事象 A が真のときに 1，さもなくば 0 を取る指標関数である．このとき，高頻度サンプリング（$\Delta \to 0$）の状況において，$HY \xrightarrow{P} CV$，すなわち，HY が CV の一致推定量となっていることが示される．HY を RV と併用すれば，RCV と同様に，相関係数の推定も一致的に行うことができる．

図 1 に，HY の計算過程の様子を示す．例えば，いま $i = 4$ であるとすると，X^1 に対する 4 番目の観測区間 I^4 とオーバーラップしている X^2 の観測区間は J^3, J^4 のみであるから，これらの観測区間における X^1, X^2 の変化量の積 $\left(X^1_{S^4} - X^1_{S^3}\right)\{\left(X^2_{T^3} - X^2_{T^2}\right) + \left(X^2_{T^4} - X^2_{T^3}\right)\}$ のみが加算され，次の $i = 5$ に移る，といった具合である．HY は実現共分散 RCV のときのような同期化が一切不要である．式 (4) と (3) とを比較すると，HY には，指標関数を通じて，取引の生起時間の情報が使われており，より有効な情報の使い方がなされている．また，HY は i, j, 2 つのインデックスについての和を取ってはいる

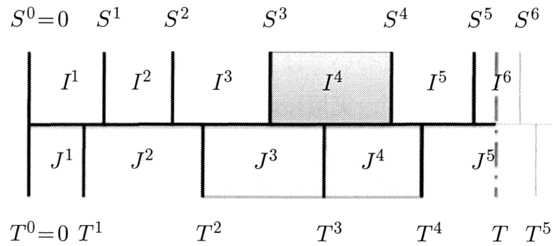


図 1　HY 推定量の計算方法．

*2)　高頻度収益率の計測区間幅と相関係数との間の関係でよく知られている実証的現象に Epps 効果がある．これは，収益率計測区間幅を短く取るほど，対応する相関係数計測値の絶対値が小さくなるという現象であり，T.W. Epps によって初めて報告された4)．

が，指標関数の働きによって，実質的には，計算量は実現共分散に比べて比例的にしか増えない．

筆者らは，観測時刻 (S^i), (T^j) が**停止時刻**（stopping time）であり，X^1, X^2 が**連続セミマルチンゲール**（continuous semimartingale）であるような状況において，HY の漸近分布を導出するなど理論をさらに発展させている[6]．これは，観測時刻（＝取引時刻）と価格過程が，自分自身の過去のみならず，相互に依存し得るようなより一般的な設定である．

その他の方法論

なお，非同期観測される高頻度データを用いて，共分散や相関係数を推定するその他の方法論も提案されている．その中には，当初から離散時間モデルを使うものもあるが，ここでは，“連続時間拡散過程＋離散時間サンプル” の設定の中での代替的なアプローチを紹介しよう．

Malliavin らのグループは，フーリエ変換を応用したアプローチ（“フーリエ推定量”）を提案した．あらかじめ（対数）価格 X^1, X^2 に対する観測区間 $[0,T]$ を $[0,2\pi]$ の間にスケール変換し，$0 = s_0 \leq \cdots s_m \leq 2\pi$, $0 = t_0 \leq \cdots t_n \leq 2\pi$,

$$MM = \frac{1}{2N+1}\sum_{|k|\leq N}\sum_{i=1}^{m} e^{\mathrm{i}kt_i}(X^1_{s_i} - X^1_{s_{i-1}}) \times \sum_{j=1}^{n} e^{-\mathrm{i}ks_j}(X^2_{t_j} - X^2_{t_{j-1}}) \qquad (5)$$

にて推定量を構成する．但し，$\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ である．実際は，この最終形に至るまでに長い議論を得る必要があるが，興味のある読者は，文献 9) を参照されたい．式 (5) から，同期化が施されることなく各観測区間上の増分（対数収益率）が（重み付きで）評価されていることが分かる．同推定量の理論的諸特性については Malliavin らのグループが調べているが，実用においては，フーリエ係数の個数 N の選択が重要であることは言うまでもない．

さらに最近の研究の動向として，ここで焦点を当てた非同期性の問題のみならず，下述の “マイクロストラクチャ・ノイズ” にどう対処するかが，RV の場合（1 次元のケース）ともども研究課題となっている．HY 推定量であっても，このような観測ノイズの影響を免れないことが，複数の実証研究によって示されている．そこで，HY 推定量を改良してノイズに対処する方法論が提案されている．

さらには，2 変数間の共分散推定にとどまらず，より高次元の共分散行列を，正定値性を与えつつ，精度良くかつ計算効率の高い推定方法も研究課題である．文献では，拡散過程（＋ノイズ）の離散時点観測というフレームワークを保持しつつ，Wang and Zhou(10)[15] による，ボラティリティ推定に対するサブサンプリング法[16] を分散共分散行列の各要素に閾値や取り得る値の幅を設定することによって高次元の分散共分散行列の推定法にまで拡張した方法，Barndorff-Nielsen, *et al.* (10)[3] による一般的な重み関数（カーネル）を用いる方法などの研究がある[*3]．

マイクロストラクチャと観測ノイズ

株式や為替レートなどの金融証券の価格を連続時間拡散過程で記述するのは，オプション評価における Black–Scholes 理論の出発点としての幾何ブラウン運動が代表例であるように，金融工学・数理ファイナンスにおいては極めて標準的なものである．したがって，金融証券市場の価格・収益率時系列を，連続時間拡散過程を離散時間でサンプルしたものと見なすアプローチはごく自然なものと言える．しかし，これは適切なアプローチと言えるのだろうか．

図 2 は，大証で取引されている森精機株 2008 年 6 月 2 日の約定価格のティック・バイ・ティック・データ，最初の 100 取引（ティック）である．縦軸は株価，横軸は取引時刻（午前 0 時を起点とする秒表示，例えば午前 9 時=32400）を表す．

---

*3) 個別取引の非等間隔性や非同期性が分散や共分散の推定に与える影響は，ファイナンス分野の幾つかの異なる文脈において，今日のように高頻度データ分析が普及する以前から研究されていた[8,10,13]．

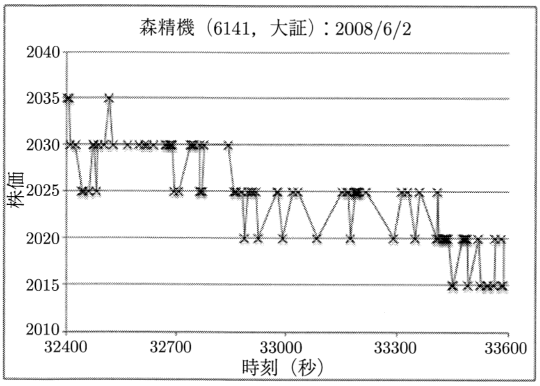


図 2　森精機株のティック・バイ・ティック・データ（2008 年 6 月 2 日，大証，最初の 100 ティック，日経 NEEDS『ティックデータ・ヒストリカル』をもとに筆者が作成）.

データの出所は，日経 NEEDS『ティックデータ・ヒストリカル』である．同データセットにおける，大証取引銘柄のデータ解像度は 1 秒であり，同一秒内の複数取引は取引成立順に連番が付与されている．

同図より，（対数）価格過程が値を取るべき状態空間がもはや連続とは言えないことは明白である．すなわち，約定価格は最小取引価格（ティックサイズ，5 円）の整数倍のグリッド上を飛び飛びに移動し，しかも，約定価格は上下動の確率が一定であるようなランダムウォークするのではなく，上がったら下がり，下がったら上がるようなリバウンドする傾向のあること（“bid ask bounce 現象”），また，前の取引から値段の違わない，つまり収益率がゼロの取引も多数発生する傾向のあることが見て取れる．これらの現象は，“連続時間連続状態空間拡散型過程＋離散時間サンプリング” というモデリング・アプローチが，極めて高頻度サンプリングの領域では現実を的確に表現しないことを示唆する．

RV 研究では，これを踏まえ，拡散過程に従っている観測不能な理論価格と実際に観測される市場価格との間に乖離（観測誤差）が生じている状況における，理論価格部分のボラティリティ評価問題として捉える．最も単純な改良法は，“市場価格＝理論価格（拡散過程部分）＋観測ノイズ” と加法ノイズを加えるものであり，このようなモデルの下でのボラティリティの望ましい推定方法が研究されている（例えば，文献 16)）．このような理論価格からの乖離部分は，市場の無裁定性では説明不能な，現実の市場の取引プロセスに内在する諸要素が累積された結果であると見なし，**マイクロストラクチャ・ノイズ**あるいは**マイクロストラクチャ効果**と呼ばれる．

ファイナンス分野では，“取引の仕組み（メカニズム）が価格形成のプロセスに与える影響を分析する研究”[11)]が 1970 代に始まり 1980 年代以降活発になされており，それらの成果は総称して**市場のマイクロストラクチャ理論**（market microstructure theory）と呼ばれている．高頻度データは，マイクロストラクチャ理論の実証に欠かせぬものとなっている．一方，*RV* 研究においては，金融証券の本質的価値の変動性にそもそもの関心があり，そのために高頻度データの第一義的特徴と言える 1 日など短期間における大規模なデータサイズにその価値を見出しているのであって，高頻度データを生成するに至る市場取引のプロセスやそれが高頻度データ上に反映されたマイクロストラクチャ・ノイズには基本的には興味がないのである．一口に，高頻度データを用いた研究といっても，目的によって，データの使い方，モデリング技法は異なるのは当然である．

以上のような市場価格の微視的な変動を記述するためのより直接的なモデリングとして，離散時間＋離散状態空間のアプローチも数多く提案されているが，ページ数の制約のため，ここでは割愛する．

■　3. おわりに　■

本稿で紹介した，非同期離散時点観測される拡散過程間の相関係数・共分散の推定問題は，高頻度データによる市場リスク計測に応用される．周知の通り，収益率のボラティリティや共分散は，オプション価格の評価・ヘッジや，金融証券の資産

運用，VaR（ヴァリュー・アット・リスク）に代表される金融機関のリスク計測・管理に不可欠のリスク指標・計測量である．高頻度データによるボラティリティ・共分散計測の理論・方法論は，実現ボラティリティを軸に，過去10年余り飛躍的に発展している分野である．

近年の情報通信技術の飛躍的発展を背景とした，取引所システムの高速化，大容量化が，高頻度データの利用拡大を生み，それが新たな統計理論，統計的方法論を育む土台となっている．高頻度データへの応用を目的として生まれあるいは発展したそのような統計理論・方法論が，数理科学の発展に寄与することになろう．

謝辞：高頻度データによる共分散推定方法に関する研究，高頻度データの高度利用に関する研究に対して，科学研究費（基盤研究（C），課題番号19530186，2007–2009年度），日本証券研究奨学財団（2009年1月–2010年12月）より研究助成金を頂いた．ここに謝意を表する．

参考文献

1) Andersen, T.G., Bollerslev, T., Diebold, F.X., and Labys, P., Modeling and forecasting realized volatility, *Econometrica*, **71**(2), 579–625, 2003.
2) Barndorff-Nielsen, O.E., Graversen, S.E., Jacod, J., Podolskij, M., and Shephard, N., "A central limit theorm for realized power and bipower variations of continuous semimartingales," in *From Stochastic Calculus to Mathematical Finance*, Springer, 2006, 33–68.
3) Barndorff-Nielsen, O.E., Hansen, P.R., Lunde, A., and Shephard, N., Multivariate realised kernels: Consistent positive semi-definite estimators of the covariation of equity prices with noise and non-synchronous trading, Preprint, 2010.
4) Epps, T.W., Comovements in Stock Prices in the Very Short Run, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **74**, 291–298, 1979.
5) Hayashi, T. and Yoshida, N., "On Covariance Estimation of Non-synchronously Observed Diffusion Processes," *Bernoulli*, **11**(2), 359–379, 2005.
6) Hayashi, T. and Yoshida, N., "Nonsynchronous Covariance Estimator and Limit Theorem II," ISM Research Memorandum, No.**1067**, 2008.
7) Karatzas, I. and S.E. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag, 1991.
8) Lo, A.W., and MacKinlay, A.C., An econometric analysis of nonsynchronous-trading, *J. Econometrics*, **45**, 181–212, 1990.
9) Malliavin, P. and Mancino, M.E., "A Fourier transform method for nonparametric estimation of multivariate volatility," *Ann. Statist.*, **37**(4), 1983–2010, 2009.
10) Merton, R.C., On Estimating the Expected Return on the Market, *J. Fin. Economics*, **8**, 323–361, 1980.
11) O'Hara, M., *Market Microstructure Theory*, Blackwell, 1995（邦訳：大村・宗近・宇野訳，『マーケット・マイクロストラクチャー：株価形成・投資家のパズル』，金融財政事情研究会，1996）．
12) Schafer, J.L, *Analysis of Incomplete Multivariate Data*, Chapman & Hall, 1997.
13) Scholes, M., and Williams, J., Estimating Beta from Nonsynchronous Data, *J. Fin. Economics*, **5**, 309–327, 1977.
14) 内田雅之，"確率微分方程式の母数推定"，『21世紀の統計科学 III: 数理・計算の統計科学』第7章，2008.
15) Wang, Y. and Zou, J., Vast volatility matrix estimation for high-frequency financial data, *Ann. Statist.*, **38**(2), 943–978, 2010.
16) Zhang, L., Mykland, P.A., and Aït-Sahalia, Y., "A Tale of Two Time Scales: Determining Integrated Volatility with Noisy High-frequency Data," *J. Amer. Statist. Assoc.*, **100**, 1394–1411, 2005.

（はやし・たかき，慶應義塾大学大学院経営管理研究科）

量子ホール効果と1次元離散格子模型



押川　正毅

1. 量子ホール効果

量子ホール効果は，強磁場中の2次元電子系が引き起こす量子現象である[1)]．我々の住む空間は3次元であるが，半導体の界面に電子を閉じ込めて2次元電子系をつくることができる．2次元面に垂直に磁場をかけた状態で2次元面内方向に電場をかけると，電場に垂直な方向に電流が流れる．これをホール効果と言い，電場とそれに垂直な方向の電流の比例係数をホール伝導度と言う．ホール効果は，電子が磁場から受けるローレンツ力を考慮すれば，古典的にも理解できる．古典的なホール効果では，ホール伝導度は磁場に比例する．

しかし，フォン・クリッツィングらは，不純物の少ないサンプルで強磁場領域では，ホール伝導度が e^2/h の整数倍に量子化されることを実験的に見出した．これが**整数量子ホール効果**である．量子化されるホール伝導度にプランク定数 h が含まれていることからも，量子ホール効果は本質的に量子力学的な現象であることがわかる．

まず，2次元空間中で磁場下にある1つの電子のエネルギー準位を考えよう．これは，学部の量子力学の講義で扱う内容であるが，念のため復習しておく．なお，本記事中では電子のスピン自由度は考えないこととする．磁場中のハミルトニアン

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - e\vec{A}(\vec{r})\right)^2 \qquad (1)$$

について，(一体の）シュレーディンガー方程式を解くことになる．ここで，m は電子質量，$\vec{p}$ は正準運動量，$\vec{A}(\vec{r})$ は位置 $\vec{r}$ におけるベクトルポテンシャルである．

シュレーディンガー方程式には，磁場ではなくベクトルポテンシャルが現れる．これは，量子力学において磁場よりもベクトルポテンシャルが基本的な位置を占めていることを反映している．同じ磁場についても，ベクトルポテンシャルにはゲージの取り方に対応した自由度がある．ここでは，ランダウゲージを取り，2次元面に垂直な一様磁場 B を表すベクトルポテンシャルとして $\vec{r} = (x, y)$ に対して

$$\vec{A}(\vec{r}) = (0, Bx) \qquad (2)$$

を採用する．すると，ハミルトニアンは y 方向に並進対称性を持つので，y 方向についてはフーリエ変換して，y 方向の運動量 k_y を用いてハミルトニアンを

$$H = \frac{{p_x}^2}{2m} + \frac{m{\omega_c}^2}{2}\left(x - \frac{\hbar k_y}{m\omega_c}\right)^2 \qquad (3)$$

と表示できる．ただし，

$$\omega_c = \frac{eB}{mc} \qquad (4)$$

はサイクロトロン（角）振動数である．これは，変数 x についての**調和振動子**のハミルトニアンに他ならない．従って，エネルギー準位は離散化され

$$E_n = \hbar\omega_c\left(n + \frac{1}{2}\right) \qquad (5)$$

となる．k_y は調和ポテンシャルの中心座標のずれにのみ対応し，エネルギーは k_y に依存しない．この離散的なエネルギー準位を**ランダウ準位**と呼ぶ．それぞれのランダウ準位には，多くの状態が縮退している．縮退している状態の数については後ほど詳しく議論する．

相互作用を無視すれば，多電子系の基底状態は，下のランダウ準位から順に電子を詰めていくことで得られる．仮想的に化学ポテンシャルを変化させることを考えると，化学ポテンシャルが n 番目と $n+1$ 番目のランダウ準位の間にあれば，基底状態は n 番目以下のランダウ準位にすべて電子が詰まった状態で与えら

れる．このとき，ホール伝導度は ne^2/h となる．これは，整数量子ホール効果で見られるホール伝導度の量子化に対応している．実際の実験では化学ポテンシャルを変化させるわけではなく，粒子数が一定の状態で磁場を変化させるので，実は上記のランダウ準位の議論だけでは整数量子ホール効果の説明にはならない．実験で見られる整数量子ホール効果には，不純物による局在の効果が必要である．しかし，整数量子ホール効果の背後には量子力学における磁場中のエネルギー準位の離散化（ランダウ量子化）があると言っても良いであろう．

整数量子ホール効果の発見の後，さらに強磁場の領域でホール伝導度が e^2/h の $1/3, 2/5$ などの分数倍に量子化される現象が発見された．これが**分数量子ホール効果**である．上で述べたように，整数量子ホール効果は，あるランダウ準位に電子がすべて詰まったとき，このランダウ準位がホール伝導度に e^2/h の寄与をすることに対応している．これとの類推で考えると，例えばホール伝導度が $(1/3)e^2/h$ の分数量子ホール効果は，最低ランダウ準位の 1/3 に電子が詰まった状態に対応していることになる．すなわち，最低ランダウ準位の 1/3 に電子が詰まった状態が安定になることによって，ホール伝導度が $(1/3)e^2/h$ の分数量子ホール効果が発現する．

相互作用のない電子系を考えている限り，縮退したランダウ準位の一部に電子が詰まった状態が安定化する理由はない．逆に言えば，分数量子ホール効果には電子間の相互作用が本質的に重要だと言うことになる．電子は電荷を持つのでその間にはクーロン斥力が働く．このクーロン斥力の効果によって生じる，独立粒子近似では本質的に表せない，相関の強い量子液体状態が分数量子ホール効果を示すのである．

ホール伝導度だけを見ると，分数量子ホール効果は単に整数量子ホール効果の整数が分数になっただけのようにも見える．しかし，分数量子ホール状態は，上記のように独立粒子近似では本質的に理解できない新しい量子液体状態なのである．それを反映して，素励起である準粒子が**分数電荷**を持ったり，ボース統計でもフェルミ統計でもない**分数統計**に従うなど多くの奇妙な性質を示す．これらの奇妙な性質を総称して**トポロジカル秩序**と呼ぶことがある[2)]．特に，ムーアとリードにより提案された分数量子ホール状態[3)]では，準粒子がマヨラナフェルミオンの自由度を持つことが理論的に示されている．マヨラナフェルミオンは，粒子の交換が単なる位相因子ではなく行列で表される「**非アーベル統計**」に従う．マヨラナフェルミオンを活用すると量子計算におけるデコヒーレンスが抑制されると考えられていることもあって，マヨラナフェルミオンを実現するための提案が最近様々な系で活発に行われている[4)]．マヨラナフェルミオンの実験的な実現は分数量子ホール状態以外で先に確立される可能性もあるが，理論的なアイデアの端緒は分数量子ホール状態にあったことは変わらない．このように，分数量子ホール効果は，近年の物性理論の柱となった様々な概念の苗床としての役割も果たしたのである．この観点からも，多くの分数量子ホール状態の構成や分類は重要な問題である．

2. 1次元格子模型との対応

さて，ここまで見てきたように，量子ホール効果は磁場下で2次元の連続空間中を運動する電子の問題である．量子多体系の問題の別のクラスとして，ハバード模型やハイゼンベルグスピン模型などのように，離散的な格子上の模型が研究されている．物性物理の多くの問題では，このような模型はそれぞれの原子の持つ自由度を格子点上の変数として表すことによって得られる．これに対し，量子ホール効果では，結晶格子構造は直接には物理に影響しないと考えられている．しかし，分数量子ホール状態の分類は，理論的に1次元の**格子模型**の相の分類と対応することが知られており，最近この方面からの研究が活発に行われている[5~7)]．量子ホール効果において，連続と離散が交錯する話題はいくつもあるが，本記事では，以下，離散的な1次元格子上の模型との対応について述べることにする．

大きさ $L_x \times L_y$ の長方形上の2次元電子系を考え，x 方向，y 方向それぞれに周期的境界条件を課す．すなわち，系は2次元トーラスとなる．このとき，k_y は j を整数として $k_y = 2\pi j/L_y$ で与えられる．連続空間で考えているので，この段階では j に上限はない．しかし，(3) 式によると，k_y は x 座標に関する調和ポテンシャルの中心位置に対応する．いま $0 \le x < L_x$ とすると，j の上限は $N = m\omega_c L_x L_y/(2\pi\hbar)$ となる．N は各ランダウ準位に属する状態の数を与えるが，このとき系を貫く磁束 $\Phi = BL_xL_y$ が磁束量子 Φ_0 の N 個分に相当している．

最低ランダウ準位は調和振動子の基底状態に対応し，それぞれの固有関数（ランダウ軌道）φ_j は図1のよう

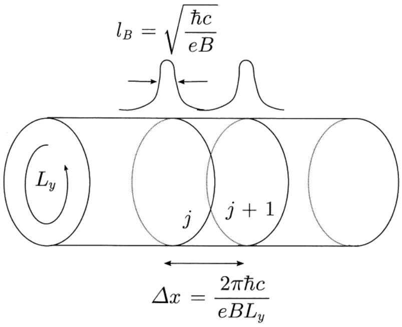


図 1　ランダウゲージ (2) による，トーラス上の最低ランダウ準位のランダウ軌道．波動関数は y 方向には平面波状態であるが，x 方向には幅 l_B に局在したガウス型関数である．隣り合うランダウ軌道の中心の間隔は Δx である．タオ・サウレス極限 $L_y \to 0$ では波動関数の幅に比べ間隔が大きくなるので，波動関数の重なりが小さくなる．

に $\Delta x = 2\pi\hbar c/(eBL_y)$ として中心座標 $x = (\Delta x)j$，幅 $l_B = \sqrt{\hbar c/(eB)}$ のガウス型関数となる．整数 j それぞれについて，中心座標付近に局在した状態と解釈することもできるので，j をサイト番号と読み替えることによって系を 1 次元格子模型に対応させることができる．

1 次元格子模型のハミルトニアンは，クーロン斥力項の行列要素を評価して決めることができる．クーロン斥力を一般化して様々な電子間相互作用を考える場合があるが，その場合も同様に相互作用項の行列要素を決めてやればよい．ただし，磁場中の 2 次元電子系から 1 次元格子模型を導いたとき，1 次元ハバード模型のような標準的な 1 次元格子模型と異なる点がいくつかある．

まず，各サイトの x 座標（波動関数の中心座標）が y 方向の運動量に比例していたことを思い出そう．ハバード模型では，通常電子のホッピング項

$$H_K = -\sum_{j,k} t_{jk} c_j^\dagger c_k \tag{6}$$

を考える．ここで，c_k はサイト k 上の電子の消滅演算子，$c_k^\dagger$ は生成演算子であり，$c_j^\dagger c_k$ はサイト k からサイト j への電子の移動を表す．しかし，今考えている問題ではこのような電子の異なるサイト間での移動は y 方向の運動量の非保存を引き起こす．2 次元電子系の問題では，（今考えている範囲では不純物等を導入しておらずハミルトニアンは y 方向へ並進不変なので）y 方向の全運動量は保存される．従って，対応する 1 次元格子模型には，電子の**「重心座標」の保存則**が要請される．このために (6) 式のようなホッピング項は出現せず，ハミルトニアンは以下のように与えられる．

$$H = \sum_i \sum_{k \geq |m|} V_{km} c_{i+m}^\dagger c_{i+k}^\dagger c_{i+m+k} c_i. \tag{7}$$

ここで V_{km} は係数であり，距離 $k+m$ 離れた粒子の対が（重心座標を保存しつつ）距離 $k-m$ の対になる振幅を表している．ただし，$m=0$ については，粒子数演算子 $n_j = c_j^\dagger c_j$ を用いて

$$\sum_i V_{k0} n_i n_{i+k} \tag{8}$$

と書ける．これは，距離 k 離れた粒子間の相互作用と解釈できる（当然重心座標は保存する）．

次に，波動関数の（x 方向の）幅は系の大きさによらないのに対して，中心座標の間隔は L_y に反比例している．従って，L_y が大きいと，j が大きく異なるサイト間の行列要素も無視できなくなる．1 次元格子模型としては，長距離相互作用が生じることになる．特に，L_y が大きい極限では相互作用の（サイト数に関しての）「到達距離」が無限大となり，1 次元系とは呼べなくなってしまう．これは，もともと 2 次元の問題を考えていたのでむしろ当然とも言える．

逆に，L_y が小さい極限を考えると，「遠距離」の相互作用は無視でき，近距離相互作用のみを持つ 1 次元格子模型を得る．これを**タオ・サウレス極限**（あるいは「細いトーラス」極限）と呼ぶ[8]．L_y を固定して L_x を無限大にする「熱力学的極限」を考えることもできる．この状況では，要は幅が有限で長さが無限の系を考えているので系は 1 次元格子模型として記述できるのである．この観点からは，量子ホール系の 1 次元格子模型としての記述はあくまで 1 次元的な極限に限られる．しかし，この 1 次元的なタオ・サウレス極限を考えることで，意外なほどに分数量子ホール状態についての知見が得られることが最近見出されてきた．

3. タオ・サウレス極限での基底状態

まず，タオ・サウレス極限 $L_y \to 0$ を考えよう．この極限では，ハミルトニアンは (7) においてサイト間の斥力相互作用 V_{k0} のみを考えれば良いことになる．また，サイト間の距離 k が増加するにつれて相互作用は急速に小さくなるので，近距離のものだけを考えれ

ば良い．この極限では，電子のホッピングは起こらない．そのため，基底状態を含めてハミルトニアンのすべての固有状態は各サイトの電子数が確定した状態によって与えられる．特に，系の基底状態は，斥力相互作用 V_{k0} によるエネルギーを最低にする状態である．

ここで，例として，充填率 $\nu = 1/3$，すなわち最低ランダウ準位の状態数の 1/3 の個数の電子が存在する場合を考えよう．この場合，2 次元では，分数量子ホール状態の典型であるラフリン状態が実現されると考えられる．タオ・サウレス極限では，サイト数の 1/3 が電子で占有されている 1 次元格子系を考えることになる．電子が隣どうし，または 2 つ離れたサイトに配置されると V_{10}, V_{20} によりエネルギーが上昇してしまうので，基底状態は，3 サイトごとに電子が占有した状態で与えられる．**占有数表示**では，

$$|\Psi_0\rangle = |\ldots 100100100100\ldots\rangle \tag{9}$$

となる．これは，電子密度が周期的に変化する，いわゆる**電荷密度波（CDW）状態**である．(9) を並進移動した状態

$$|\Psi_1\rangle = |\ldots 010010010010\ldots\rangle, \tag{10}$$

$$|\Psi_2\rangle = |\ldots 001001001001\ldots\rangle \tag{11}$$

も基底状態であり，基底状態は 3 重に縮退している．すなわち，電荷密度波状態は格子模型のハミルトニアンの並進対称性を自発的に破っている．

このような電荷密度波状態は 1 次元格子系の基底状態としては，かなり「当り前」のものであり，新奇なものでは全くない．高度に非自明な系と考えられている分数量子ホール状態とは全く別物のように見える．もちろん，上記はタオ・サウレス極限という 1 次元的な極限についての話であり，2 次元の量子ホール状態と対応がつくかどうかは自明ではない．しかし，数値的な研究により，L_y をゼロから増やしても相転移はなく，上記のタオ・サウレス極限における電荷密度波状態は，2 次元の極限では $\nu = 1/3$ で実現される分数量子ホール状態であるラフリン状態[9]と断熱的に接続されていることがわかった．従って，1 次元の電荷密度波状態と，ラフリン状態はある意味で「同じ相」に属するとも考えられる．

これは非常に驚くべき対応である．例えば，1 次元の電荷密度波状態は電荷密度という秩序を持っているが，分数量子ホール状態であるラフリン状態は通常の意味での秩序は持たないはずである．これは一見矛盾のように見えるが，そうではない．1 次元系としての電荷密度は，2 次元の電荷密度を y 方向に積分したものに対応する．L_y が有限の場合この 1 次元的な電荷密度の振幅はゼロではないが，L_y を増加させると減少し，2 次元の極限 $L_y \to \infty$ では電荷密度の振幅はゼロになってしまう．従って，2 次元の極限では電荷密度波は存在しない．先述したように，2 次元の極限では局所的な物理量で検出できる秩序は一切存在しないと考えられている．

一方，上記のようにタオ・サウレス極限で $\nu = 1/3$ の基底状態は三重に縮退している．これが 2 次元の極限に相転移なしにつながっているので，基底状態の縮退度は変化せず 3 のままであるはずである．実際，$\nu = 1/3$ のラフリン状態はトーラス上で三重に縮退している．ラフリン状態は通常の秩序を持たないので，この基底状態の縮退は**トポロジカル縮退**と呼ばれる．トポロジカル縮退は，分数量子ホール状態などのトポロジカル秩序相を特徴付ける重要な情報である．例えば，トポロジカル縮退度（トポロジカル縮退した基底状態の数）が異なる状態は，異なるトポロジカル秩序相に属することになる．タオ・サウレス極限を考えることで，ラフリン状態のトポロジカル縮退度を簡単に導出できたことになる．

さらに，タオ・サウレス極限で励起状態を考えてみよう．最低エネルギーの励起状態は，$|\ldots 100\mathbf{101}00100100\ldots\rangle$ のように，一箇所で電子間の距離が 2 になった状態で与えられる．この励起の左側は基底状態 $|\Psi_0\rangle$，右側は基底状態 $|\Psi_2\rangle$ と同じ配置であり，この励起は異なる基底状態間の「**ドメインウォール**」と見なすことができる．このようなドメインウォールを 3 つ連続して作ってみよう．$|\ldots 100\mathbf{1010101}00\ldots\rangle$．この状態から，中心の電子 1 つを取り除くと，$|\ldots 100100\mathbf{0101}00\ldots\rangle$ となる．ここから，一つの電子を左に 1 サイト動かすと $|\ldots 100100100100\ldots\rangle$ となる．これは，基底状態 $|\Psi_0\rangle$ に他ならない．

これから，ドメインウォール 3 つは，電子 1 個分の電荷を持っていることがわかる．すなわち，$\nu = 1/3$ 電荷密度波状態でのドメインウォール 1 つの持つ電荷は $e/3$ を持つことになる．1 次元の電荷密度波状態においてドメインウォール励起が分数電荷を持つことは，ポリアセチレンについて以前より指摘されていた[10]．この分数電荷の機構は，分数量子ホール状態において準粒子が分数電荷を持つ機構とは異なるというのが一般的な見方であるが，本記事のようにタオ・サウレス極

限から出発する考え方ではつながっていることになる．実際，$\nu = 1/3$ ラフリン状態での準粒子の持つ電荷は $e/3$ であり，タオ・サウレス極限でのドメインウォールの持つ分数電荷と等しい．

4. 双対性と占有パターン

タオ・サウレス極限からのアプローチで分数量子ホール状態の系統的な分類・構成ができることも期待される．タオ・サウレス極限では，系は1次元の密度ゆらぎのない電荷密度波状態にある．このような電荷密度波状態は無数に構成できる．もちろん，どのような電荷密度状態が基底状態になるかはモデル（電子間相互作用）によるが，その選び方によってはどのような電荷密度波状態も実現できそうに見える．しかし，量子ホール系のタオ・サウレス極限で基底状態として出現し得る電荷密度波状態には**双対性**による強い制約があることが最近ザイデルによって示されている[12]．以下，これについて述べる．

2次元量子ホール系から1次元的なタオ・サウレス極限を議論するとき，ここまでは $L_y \to 0$ の極限を取っていた．しかし，当然ではあるが縦横比を逆にして $L_x \to 0$ の極限を取ることもできる．このとき，y 方向に局在した j 番目のランダウ軌道を $\bar{\varphi}_j$ とする．上と全く同じ議論によって，これらのランダウ軌道を y 方向に伸びる1次元格子上のサイトと見なすことができる．$L_x \to 0$ 極限での基底状態として現れる電荷密度波状態を $\overline{|\Psi_\mu\rangle}$ とする．例えば，$\nu = 1/3$ のラフリン状態は式 (9)–(11) と同様の3つの電荷密度波状態 $\overline{|\Psi_{0,1,2}\rangle}$ に対応する．ここで，上線は，占有数の並びが同一であっても $L_x \to 0$ の極限を考えているため $|\Psi_{0,1,2}\rangle$ とは異なる状態であることを明示している．

$L_y \to 0$ の極限で，系が電荷密度波状態 $|\Psi_\mu\rangle$ にあったとする．ここから，系の面積 $L_x L_y$ と電子数を保ったまま断熱的に L_y を増加させ，2次元的な系（$L = L_x = L_y$）にすると分数量子ホール状態の一つになる．これを $|\Phi_\mu\rangle$ としよう．一方，$L_x \to 0$ の極限で系が $\overline{|\Psi_\mu\rangle}$ にあり，ここから断熱的に L_x を増加させたときの状態を $\overline{|\Phi_\mu\rangle}$ とする．トーラス上の分数量子ホール状態は一般に縮退しているため $|\Phi_\mu\rangle$ と $\overline{|\Phi_\mu\rangle}$ は異なる状態だが，一方は他方の線形結合で書ける．

T_x, T_y をそれぞれ x, y 方向に「ランダウ軌道1つ分」$2\pi\hbar c/(eBL)$ だけずらす磁気並進演算子とする．j 番目のランダウ軌道を φ_j とすると，

$$T_x\varphi_j = \varphi_{j+1}, \quad T_y\varphi_j = e^{-2\pi ij/N}\varphi_{j+1}, \quad (12)$$

$$T_x\bar{\varphi}_j = e^{2\pi ij/N}\varphi_{j+1}, \quad T_y\bar{\varphi}_j = \bar{\varphi}_{j+1} \quad (13)$$

である．ここで N は2節で定義したように各ランダウ準位の状態数であり，今考えている1次元格子模型のサイト数に等しい．$|\Phi_j\rangle$ と $\overline{|\Phi_j\rangle}$ を基底としたとき，演算子 $\mathcal{O}$ の表現行列をそれぞれ $R(\mathcal{O}), \bar{R}(\mathcal{O})$ としよう．式 (12)，(13) より

$$R(T_x) = \bar{R}(T_y), \quad R(T_y) = \bar{R}(T_x)^\dagger \quad (14)$$

となる．一方，R と $\bar{R}$ は異なる基底を取ったときの表現行列なので，ユニタリ行列 U とその逆行列 $U^\dagger$ によって $\bar{R}(\mathcal{O}) = U^\dagger R(\mathcal{O})U$ と結ばれている．従って，双対性の関係式

$$R(T_x) = U^\dagger R(T_y)U, \quad R(T_y) = U^\dagger R(T_x)^\dagger U \quad (15)$$

を得る．これらの表現行列は，縦横比を変えても変化しないので，タオ・サウレス極限（$L_y \to 0$ または $L_x \to 0$）について決定することができる．

ラフリン状態よりも一般的な量子ホール状態を考えよう．通常，量子ホール効果は2次元電子系を考えるが，理論的には構成粒子が電子の代わりにボース粒子の場合を考えることもできる．このような「ボース粒子の量子ホール効果」は回転ポテンシャル中のボース・アインシュタイン凝縮で実現されると考えられている．そこで，以下では，構成粒子がフェルミ粒子（電子）とボース粒子の場合の両方を考える．

充填率が互いに素な整数 p, q によって $\nu = p/q$ で与えられるものとする．タオ・サウレス極限で，この量子ホール状態は電荷密度波状態になると仮定する．このとき，基底状態の単位胞は少なくとも q サイトを持つが，ここでは基底状態の単位胞が最小の q サイトからなる場合を考える．基底状態の一つが，ある電荷密度波のパターン $|\Psi_0\rangle$ で与えられているものとすると，$\mu = 1, 2, \ldots, q-1$ に対し

$$|\Psi_\mu\rangle = T_x{}^\mu|\Psi_0\rangle \quad (16)$$

を考えると，これらも基底状態である．p と q が互いに素であることより，これらの基底状態は T_y の異なる固有値に属し，互いに直交する．さらに，基底状態はこれら q 個の状態のみで与えられると仮定しよう．一般的な議論により，充填率が $\nu = p/q$ のギャップを持つ系の基底状態は少なくとも q 重に縮退することになることが知られている[11]が，ここではその最小の縮退度を持つ場合を考えることになる．

さて，演算子 $T_x{}^q, T_y{}^q$ を考える．$|\Psi_0\rangle$ は両者の固有状態であり，また両者は T_x と可換なので，基底状態の張る空間上で両者は定数である．さらに，双対性 (15) より，これらの定数は等しいはずである．一方，$T_x{}^q$ を基底状態の（任意の）一つに作用させると，単位胞に含まれる p 個の粒子が周期的境界条件を通じて系の右端から左端に移る．最終的には元の電荷密度波状態に戻るが，このとき粒子がフェルミ粒子であると，一つの粒子が系の右端から左端に移るたびに状態が符号 -1 を獲得する．従って，フェルミ粒子の場合 $f=1$，ボース粒子の場合 $f=0$ として基底状態の張る空間上では

$$T_x{}^q = (-1)^{fp} \quad (17)$$

と書ける．

次に，$T_y{}^q$ を基底状態の一つ（例えば $|\Psi_0\rangle$）に作用させる．(12) 式を用いて具体的に評価すると

$$T_y{}^q|\Psi_0\rangle = e^{-\frac{2\pi iq}{N}\sum_{j=1}^N jn_j}|\Psi_0\rangle = e^{-\frac{2\pi i}{M}\sum_{k=1}^M [u+(k-1)qp]}|\Psi_0\rangle \quad (18)$$

となる．ただし，n_j はサイト j における粒子の占有数であり，$M = N/q$ は単位胞の数，$u = \sum_{j=1}^q jn_j$ は最初の単位胞からの寄与である．2π の整数倍の位相は無視できるので，

$$T_y{}^q|\Psi_0\rangle = e^{-i\pi(M-1)pq}|\Psi_0\rangle \quad (19)$$

となる．ここで，一般性を失うことなく粒子数 $Mp = N\nu$ を偶数と仮定できる（粒子数が奇数の場合，2倍の大きさの系を考えれば良い）．基底状態の張る空間上では

$$T_y{}^q = (-1)^{pq} \quad (20)$$

を得る．

双対性より (17) と (20) は等しいことになるので，

$$(-1)^{pq} = (-1)^{fp} \quad (21)$$

となる．粒子がフェルミ粒子（電子）の場合（$f=1$），q が偶数とすると p は奇数なので上式は成立しない．従って，タオ・サウレス極限で先ほど設けた仮定を満たす電荷密度波状態に帰着する量子ホール状態は充填率 ν の分母 q が奇数のときに限って出現する．これは有名な「**奇数分母則**」に対応し，アーベル階層状態

として知られている状態すべてについて成立する．

ただし，フェルミ粒子の場合，q が偶数のとき分数量子ホール状態が実現されないというわけではない．例えば，$\nu = 1/2$ の場合には，先に述べた非アーベル状態であるムーア・リード状態を構成できる．この状態もタオ・サウレス極限によって記述することができるが，基底状態の縮退度が q とは異なる．これは，先ほど行った仮定に反している．すなわち，q が偶数の場合にも分数量子ホール状態は存在するが，異なるカテゴリーに属するということになる．ムーア・リード状態のトポロジカル縮退度は準粒子の非アーベル統計とも関係しているが，これがタオ・サウレス極限にも反映されているのである．一方，ボース粒子の場合（$f = 0$）は，p と q のうちどちらか一つが偶数であることになる（p, q は互いに素なので両方とも偶数になることはない）．これも，先ほどの仮定の下で可能な分数量子ホール状態を強く制限するものである．

このような制約は，タオ・サウレス極限を取るときに x 軸と y 軸を入れ替えても良いという対称性（双対性）から得られた．素朴に考えると，この対称性は当り前のことで，それが非自明な結果を導くことは不思議にも思える．実は同様の議論は，共形場理論や超弦理論においても知られている．共形場理論では，x 軸と y 軸の入れ替えに関する不変性はモジュラー不変性と呼ばれる．モジュラー不変性は非常に強力であり，例えば共形場理論に現れる局所的物理量のスペクトルを決めることができる[13)]．

5. まとめ

量子ホール効果は 2 次元の連続空間中の量子多体系の問題であるが，空間の一方向のサイズが小さい極限を考えると，1 次元の離散的な格子模型に帰着する．この 1 次元の極限は，2 次元系と多くの場合断熱的につながっている．従って，分数量子ホール状態を分類する手がかりとして 1 次元格子模型の基底状態を用いることができる．1 次元的な極限では，基底状態は粒子数のゆらぎのない電荷密度波状態であり，占有数のパターンによって指定できる．この占有数のパターンは，双対性によって強い制限を受ける．

このようなアプローチは，興味深い知見を与えるが，分数量子ホール効果の理解における意義は現時点では完全には明らかではない．知られている分数量子ホール状態は 1 次元の占有数のパターンによって分類できるが，このような記述ができない分数量子ホール状態の存在は否定できない．もしそのような状態が存在すれば，本記事で議論したアプローチは量子ホール効果の物理には限定的な意味しか持たないことになる．しかしながら，2 次元と 1 次元，また連続と離散が交錯する議論は非常に魅力的であり，今後新しい物理の源泉となる期待を込めてここで紹介した．

最近の発展の一例として，タオ・サウレス極限から離れて L_y を有限にしたときの電荷密度波のゆらぎが，量子スピン鎖の問題と密接に関連することが指摘されている[14)]．

本記事の執筆に有用な議論をして頂いた方々，特に貝沼稔夫，Dung-Hai Lee，中村正明，Alexander Seidel の諸氏に感謝します．また，高吉慎太郎氏には原稿について有益なコメントを頂きました．

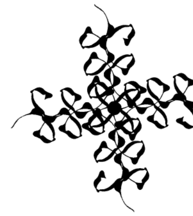
参考文献

1) 教科書として，例えば，吉岡大二郎『量子ホール効果』（新物理学選書）岩波書店 (1998).
2) 解説記事として，例えば，押川正毅「トポロジカル秩序」数理科学 2007 年 6 月号 No.**528**.
3) G. Moore and N. Read, *Nucl. Phys. B* **360**, 362 (1991).
4) 最近の解説として，例えば，M. Franz, *Physics* **3**, 24 (2010).
5) E.J. Bergholtz and A. Karlhede, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 26802 (2005).
6) A. Seidel, H. Fu, D.-H. Lee, J.M. Leinaas, and J. Moore, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 266405 (2005).
7) レビューとして，例えば，E.J. Bergholtz and A. Karlhede, "A Simple View on the Quantum Hall System", in Quantum Magnetism ed. by B. Barbara, Y. Imry, G. Sawatsky, and P.C.E. Stamp, Springer-Verlag (2008).
8) R. Tao and D.J. Thouless, *Phys. Rev. B* **28**, 1142 (1983).
9) R.B. Laughlin, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 1395 (1983).
10) W.P. Su, J.R. Schrieffer, and A.J. Heeger, *Phys. Rev. B* **22**, 2099 (1980).
11) M. Oshikawa, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 1535 (2000); M.B. Hastings, *Phys. Rev. B* **69**, 104431 (2004).
12) A. Seidel, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 026802 (2010).
13) A. Cappelli, C. Itzykson, and J.B. Zuber, *Nucl. Phys. B* **280**, 445 (1987); A. Kato, *Mod. Phys. Lett. A* **2**, 585 (1987).
14) M. Nakamura, E.J. Bergholtz, and J. Suorsa, *Phys. Rev. B* **81**, 165102 (2010).

（おしかわ・まさき，東京大学物性研究所）

格子ゲージ理論

連続と離散をつなぐ



宇川　彰

1. はじめに

Albert Einstein の相対性理論によれば，我々の住む宇宙は空間 3 次元と時間 1 次元からなる 4 次元の連続体である．137 億年前のビッグバンによる宇宙の誕生以来，物質の構成要素である素粒子は，この連続な 4 次元時空の中で生成消滅や反応を繰り返しつつ宇宙の歴史を形作ってきている．

皮肉なことに，このような素粒子の物理法則を，連続な時空のままに理解し計算することには困難が伴う．素粒子を記述する場の量子論は連続無限な自由度を持つ量子力学系であるが，そのような系を直接取り扱える無限次元解析は知られていないからである．

格子ゲージ理論とは，連続時空に代わって離散な時空格子を導入し，この格子上に場の量子論を構築して物理諸量の計算を行い，その後に格子の間隔をゼロとして連続時空上の場の量子論を構成する枠組みである．

格子ゲージ理論は 1970 年代前半に誕生し，1980 年代初めからスーパーコンピュータを用いた大規模な数値計算と結合して，素粒子・原子核物理と計算機工学の両分野の発展を促してきた．格子ゲージ理論の計算科学としての側面は極めて重要なテーマではあるが，その解説は別の機会に譲り，本稿では，格子ゲージ理論が必要とされる理由や，離散格子から連続な時空上の理論を構成する考え方と 2 次相転移の関係，格子上のカイラル対称性など，連続と離散に関わる格子ゲージ理論の基本的な考え方を説明する．

2. 素粒子を記述するゲージ場の量子論

格子ゲージ理論を導入するために，まず，素粒子と場の理論の関係，さらにはゲージ対称性を説明しよう．量子力学によれば，素粒子は時間座標 t と空間座標 x, y, z を変数とする複素数の波動関数 $\psi(x, y, z, t)$ によって記述される．以下, 4 元座標ベクトル記法 $x = (ct, x, y, z)$（但し c は光速）を使って波動関数を $\psi(x)$ と書くことにすると，波動関数は時空の各点 x ごとに値を持つ物理量である．このような物理量を**時空上に定義された場**と呼ぶことにすると，量子力学的には，素粒子は場により記述されることになる．場を基本的な力学変数と考えて素粒子を記述する量子力学的体系が**場の量子論**である．

力学系としての場の量子論を決める最も重要な量は**作用**である．例えば，電子の場合を考えてみよう．相対性理論に基づき電子を記述する場は 4 つの成分を持つスピノルと呼ばれる量 $\psi_\alpha(x)$, $\alpha = 1, \cdots, 4$ となる．さらに，γ^μ を 4 行 4 列の複素行列（具体的な形は省略する），m を電子質量とすると，電子場の作用は，スピノル添え字を省略すると，

$$S = \int d^4x \left[\bar{\psi}(x) \left(-i \sum_{\mu=0}^{3} \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + m \right) \psi(x) \right]$$

と書ける．

次に**ゲージ対称性**を導入しよう．量子力学において波動関数の位相は定まらない．実際，上記の作用は場の位相変換 $\psi(x) \to e^{i\theta}\psi(x)$, $\bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}(x)\, e^{-i\theta}$ の下で不変である．位相変換は次のように一般化できる．場 $\psi(x)$ が N 個の成分（内部自由度）$a = 1, \cdots, N$ を持つとする．このとき，変換 $\psi^a(x) \to \sum_{b=1}^{N} V^{ab}\psi^b(x)$, $\bar{\psi}^a(x) \to \sum_{b=1}^{N} \bar{\psi}^b(x) V^{\dagger ba}$ の下で作用が不変であるには，行列 V が $V^\dagger V = I$ を満たす N 次元のユニタリ行列であればよい．

それでは，この変換行列が時空の各点ごとに独立

に変わる変換 $V(x)$ だったらどうだろうか？このような変換を**ゲージ変換**と呼ぶ．この場合には $V^\dagger(x)\,\partial V(x)/\partial x^\mu$ を含む項が残り，そのままでは作用は不変ではないが，余分な項を打ち消す新たな場を導入して不変性を保つことができる．実際，ゲージ場と呼ばれるベクトル場 $A_\mu(x)$ を考え，ゲージ変換の下で $A_\mu(x) \to V^\dagger(x)\,A_\mu(x)V(x) - iV^\dagger(x)\,\partial V(x)/\partial x^\mu$ と変換するとすれば，次の作用は不変になる：

$$S = \int d^4x \left[\bar{\psi}(x)\left(-i\sum_{\mu=0}^{3}\gamma^\mu\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - iA_\mu(x)\right) + m\right)\psi(x) + \frac{1}{2g^2}\sum_{\mu,\nu=0}^{3} Tr\left(F^{\mu\nu}(x)\,F_{\mu\nu}(x)\right)\right].$$

ここで，$F_{\mu\nu}(x) = \partial A_\nu(x)/\partial x^\mu - \partial A_\mu(x)/\partial x^\nu - i\left[A_\mu(x), A_\nu(x)\right]$ は**場の強さ**と呼ばれる量，また g は相互作用の強さを表す量で**結合定数**と呼ばれる．

例を挙げよう．最初に議論した位相変換 $G = \left\{e^{i\theta(x)}\right\}$ は $U(1)$ 群と呼ばれる．対応するゲージ場は電磁気学でよく知られた電磁ポテンシャル，$F_{\mu\nu}(x)$ は電磁場の強さである．実際ゲージ変換は $A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial\theta(x)/\partial x^\mu$ というよく知っている変換になる．

G が 3 行 3 列の特殊ユニタリ群 $SU(3) = \left\{V : V^+V = I,\ \det V = 1\right\}$ の場合を考える．これが素粒子の強い相互作用を記述する量子色力学QCD である．$\psi^a(x)$ は陽子や中性子等を構成する**クォーク**を表す場で，3 つの状態 $a = 1,2,3$ は**カラー**と呼ばれるクォークの内部自由度である．$A_\mu(x)$ は 8 個の自由度を持つベクトル場で，クォークどうしを結び付ける力を媒介することからグルオン場（膠粒子の場）と呼ばれている．

3. 場の量子論の紫外発散 —格子ゲージ理論を必要とする理由 (1)—

ゲージ場の量子論を解くには物理量を計算する方法を確立しなければならない．結合定数 $g = 0$ の場合は**自由場**であり，詳細は省略するが，任意の物理量を解析的に計算できる．物理量は一般に結合定数 g の関数であるから g が小さい場合には冪展開を行うことが考えられる．これが**摂動展開**である．

摂動展開の計算法が最初に整えられたのは電子と光を記述する量子電気力学 QED である．量子電気力学

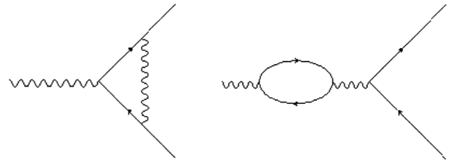


図 1 量子電気力学における Feynman ダイアグラムの例．実線は電子を波線は光子を表す．

では結合定数 g は電子の電荷 $-e$ なので，摂動展開は，**微細構造定数** $\alpha = e^2/4\pi\hbar c \approx 1/137$ に関する冪展開である．この展開の高次には電子が光子を放出・吸収する複雑なプロセスが現れる．例えば電子が光子により散乱されるプロセスの 2 次の項を図 1 に示す．このような図を Feynman ダイアグラムと呼ぶ．電子や光子が閉じたループを作る場合に，そのループに沿って循環する 4 元運動量 k は任意の値を取ることができるので積分する必要がある．この積分が運動量が大きい極限 $k \to \infty$ で無限大の発散を生ずる．これが**紫外発散**の問題である．第二次世界大戦中から戦後にかけて，我が国の朝永振一郎，米国の Julian Schwinger, Richard Feynman，英国の Freeman Dyson 等の研究の結果，QED に現れるすべての紫外発散は，電子の電荷と質量，電子の波動関数 $\psi(x)$ と電磁ポテンシャル $A_\mu(x)$ の規格化定数に吸収できることが判った（1948 年）．これを**くりこみ理論**と呼ぶ．

量子電気力学における摂動展開とくりこみ理論の印象的な成功の例として，現在でもホットな話題に電子の異常磁気能率がある．電子はスピン $\vec{s}$ を起源とする磁気能率 $\vec{\mu} = (1+a)\frac{e}{m}\vec{s}$ を持っている．係数の 1 からのわずかなずれ a を異常磁気能率と呼ぶ．現在，その値は超精密実験により 10 桁の精度で測定されている．量子電気力学に基づく計算も α の 5 次項まで求められており，次に示すように両者は 9 桁の精度で一致している．

$$a = \begin{cases} 1159\,652\,180.73 \pm 0.28 \times 10^{-12} & \text{実験値,} \\ 1159\,652\,172.99 \pm 9.33 \times 10^{-12} & \text{理論値.} \end{cases}$$

5 次項の理論計算は 12672 個の Feynman ダイアグラムに対して，振幅の生成及び，くりこみ操作を自動化し，さらに 10 次元積分をスーパーコンピュータで実行するという大規模なもので，近年の計算機技術の進展により初めて可能となった．

4. 強結合とクォークの閉じ込め
—格子ゲージ理論を必要とする理由 (2)—

場の量子論では結合定数が大きくて摂動展開が成り立たない場合，さらにはそれが物理現象を解明する上で本質的に重要な場合がある．強い相互作用の基礎理論と考えられている量子色力学はその典型例である．量子色力学における強結合の問題を解説しよう．

原子は原子核と電子から構成され，原子核は陽子と中性子が複数集まった状態であることはよく知られている．1950 年代から 1960 年代にかけて，粒子加速器の発展と共に，陽子や中性子と同様に強い相互作用をする粒子が多数見つかりハドロンと総称されるようになった．ハドロンは**クォーク**と呼ばれる，より基本的な粒子から構成されているという考えが Gell-Mann と Zweig のクォーク模型である（1965 年）．

様々の実験事実や理論的考察によれば，クォークが実在の基本粒子であることは疑いないことと考えられるが，それにも関わらずクォークを単独で検出しようとする努力は成功しなかった．そこで，クォークどうしを結び付ける力は遠距離で極めて強く，単独のクォークは存在できないのではないかとの推測が生まれた．これが**クォークの閉じ込め**である．

量子色力学においてクォークの閉じ込めを考察するには**有効結合定数**という考えを説明する必要がある．運動量スケール p における有効結合定数 $g(p)$ とは，運動量 p 以上の場の量子揺らぎをすべて積分した場合の有効理論の結合定数と定義される．$g(p)$ が小さい場合には摂動展開を適用でき，その結果は $g^2(p) \approx 1/2b_0 \log p$（但し，$b_0 = (11 - 2N_f/3)/(4\pi)^2$ で N_f は運動量 p 以下の質量を持つクォークの数）であり，運動量 p が大きくなる極限で相互作用が対数的に弱くなる．この性質を**漸近自由性**と呼び，この結果を導いた David Gross, Frank Wilczek, David Politzer はノーベル物理学賞を受賞している（1973 年）．

クォークの閉じ込めは低運動量における現象である．漸近自由性の裏返しの振舞いとして有効結合定数 $g(p)$ は運動量の減少と共に対数的に増大する．もし増大の傾向が $p \to 0$ まで続くならば遠距離において QCD の相互作用は無限に強くなり，その結果としてクォークの閉じ込めが成立することも充分あり得ると推測される．しかし一方で結合定数が大きくなれば，その冪展開である摂動展開は使えない．では摂動展開に依らずに場の量子論を定義するにはどうすれば良いだろうか．

5. 格子ゲージ理論—量子色力学を例として—

漸く格子ゲージ理論を説明する準備が整った．場の量子論の基本力学変数である場は連続な時空の各点に定義されている．このために，フーリエ分解すれば判るように，場の持つ運動量はゼロから無限大まで許され，これが紫外発散の原因となっている．従って，数学的に意味のある場の量子論の定式化を行うには，ひとまず運動量を有限のレンジ $-\Lambda < p < +\Lambda$ に限り，最終的に $\Lambda \to \infty$ という極限操作を行えばよい．時空格子は，運動量の上限 Λ を導入する一つの方法である．図 2 に示すように，連続な時空を各次元方向に間隔が a の時空格子点で置き換えれば，対応するフーリエ変換の運動量は $-\pi/a < p < +\pi/a$ に限られる．

以上の考えの下に格子ゲージ理論を量子色力学を例に取って定式化してみよう．格子点の時空座標は $x = na,\ n \in Z^4$ と書ける．クォーク場は格子点に定義すればよいので ψ_n と書くことができる．$SU(3)$ ゲージ変換は格子点ごとに定義した $SU(3)$ 行列 V_n を使って $\psi_n \to V_n\psi_n$ と書ける．工夫を有するのはグルオン場 $A_\mu(x)$ である．格子ゲージ理論を導入した Kenneth Wilson は $A_\mu(x)$ を直接使うことをせず，格子点 n とその μ 方向の隣接格子点 $n+\hat{\mu}$（$\hat{\mu}$ は μ 方向の単位ベクトル）を結ぶ線分（これをリンクと呼ぶ）上に，ゲージ群 $SU(3)$ に値を持つ場 $U_{n\mu}^{ab},\ a, b = 1, 2, 3$ を定義しこれをグルオン場とした．連続時空でのグルオン場との対応は $U_{n\mu} = \exp(igaA_\mu(na))$，ゲージ変換は $U_{n\mu} \to V_n U_{n\mu} V_{n+\hat{\mu}}^\dagger$ で与えられる．

格子上での QCD の作用は，格子間隔 $a \to 0$ の極限で連続時空上での作用に帰着するように選べばよく一意的ではない．最もよく用いられる作用は，グルオン場については格子上の最小の正方形（しばしばプラ

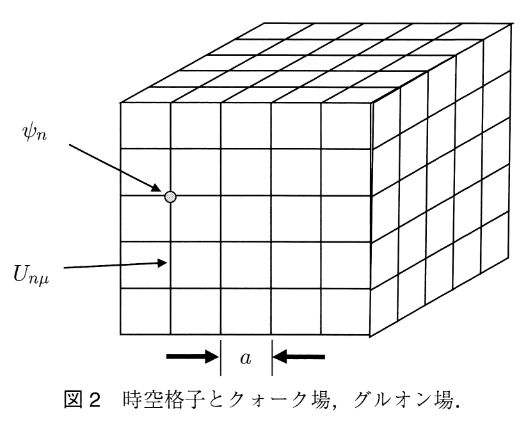


図 2 時空格子とクォーク場，グルオン場．

ケットと呼ぶ）にそって格子上のグルオン場 $U_{n\mu}$ を掛け合わせた後に $SU(3)$ 行列のトレースを取った量，クォーク場については微分を差分に替え，ゲージ不変性を保証するようにグルオン場を挿入した量である．従って，格子上の作用の例は

$$S_{lattice} = \frac{1}{2g^2}\sum_{n\mu\nu} Tr\left(U_{n\mu}U_{n+\hat{\mu}\nu}U^{\dagger}_{n+\hat{\nu}}U^{\dagger}_{\nu}\right) + \sum_{n,n} \bar{\psi}_n D_{nn'}[U]\psi_{n'}.$$

但し $D_{nn'}[U]$ はグルオン場に依存する差分演算子である．

格子ゲージ理論の量子化には Feynman の経路積分法を用いる．Feynman によれば，ある始状態からある終状態への量子力学の遷移振幅は，力学系の作用を重みとして，力学変数の各時間における可能なすべての値を積分して得られる．場の量子論では時空の各点に場の変数が定義されているから，時空の各点の場を積分変数として積分すればよいことになる．以上の準備の下で，格子上の量子色力学の任意の物理量 $O\left(\bar{\psi},\psi,U\right)$ に対する Feynman の経路積分は

$$\left\langle O\left(\bar{\psi},\psi,U\right)\right\rangle = \frac{1}{Z}\int \prod_n d\psi_n d\bar{\psi}_n \prod_{n\mu} dU_{n\mu} O\left(\bar{\psi},\psi,U\right) e^{-S_{lattice}\left(\bar{\psi},\psi,U\right)}$$

で与えられる．但しフェルミ粒子であるクォーク場の積分には特別の考察が必要である．ψ_n, $\bar{\psi}_n$ に関する積分は通常の積分ではなく反可換な Grassman 数（掛け算の順序を交換すると符号が変わる数）として積分を定義する必要がある．またグルオン場 $U_{n\mu}$ に関する積分は群 $SU(3)$ 上の不変積分として定義されている．

格子上の量子色力学はクォークの閉じ込めを説明できるだろうか．Kenneth Wilson が格子ゲージ理論の最初の論文でエレガントな解答を与えたので紹介しよう．

クォークの閉じ込めの問題を調べるには，クォークと反クォークの間にグルオン場により働く力のポテンシャルエネルギーを計算すれば良い．クォークと反クォークを距離 R だけ離れた空間の 2 点に固定したとすると 4 次元時空上ではこの 2 点から時間方向に沿って延びる直線がクォークと反クォークを表すことになる．図 3 に示すように，この状況は空間サイズが R, 時間サイズが T の時空上の長方形に沿ってクォークが伝播していると考え，$T \to \infty$ の極限を考えれば実現できる．ポテンシャルエネルギーを $V(R)$ とすると，このとき次の関係式が成り立つことを Wilson は証明した．

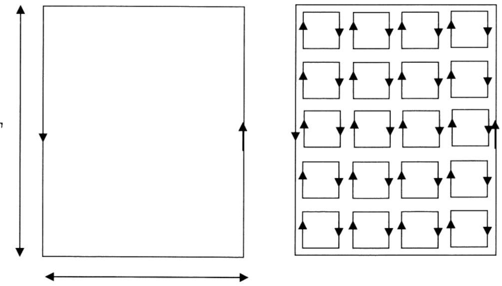


図 3　時空上の Wilson ループと強結合展開の先頭項．

$$\left\langle Tr\left(\exp\left(i\oint_{R\times T} A_\mu(x)\,dx^\mu\right)\right)\right\rangle \stackrel{T\to\infty}{\longrightarrow} \exp\left(-T\,V(R)\right)$$

左辺に現れる量を Wilson ループ演算子と呼ぶ．

強結合領域で閉じ込めが成り立つことは次のように計算できる．簡単のためにクォーク場に関する積分は省略することにする．結合定数 g が大きい場合には $1/g$ に関する冪展開を考えてよく，これを強結合展開と呼ぶ．$SU(3)$ 群上の積分の基本的な公式

$$\int dU\; U^{ab} = 0, \quad \int dU\; U^{ab}U^{\dagger cd} = \frac{1}{3}\delta^{ad}\delta^{bc}$$

を使うと，展開の最初のゼロでない項は作用に現れる正方形（プラケット）で Wilson ループの長方形を覆い尽くした項であり，積分の結果は $3\left(1/6g^2\right)^{TR/a^2}$ となる．従ってポテンシャルに対して $V(R) = \sigma R$, 但し $\sigma = \log\left(6g^2\right)/a^2$ が成り立つことが判る．この結果は，クォークと反クォークを完全に引き離す（$R=\infty$）には無限大のエネルギーが必要であるので不可能なこと，即ち閉じ込めが起こっていることを示している．直観的には，クォーク・反クォークを結ぶ色電荷の電気力線が紐状に絞られた状況が起こっているので，比例定数 σ を弦定数と呼ぶ．

図 4 に最近の数値シミュレーションによるポテンシャルの結果を示す．遠方で距離に比例して増大する様子が見て取れる．逆に原点付近では摂動展開から予想されるクーロンポテンシャル $-\alpha_s/4\pi r$ の形をしており，漸近自由性とクォークの閉じ込めが一つの関数において両立している様子が見て取れるのは興味深い．

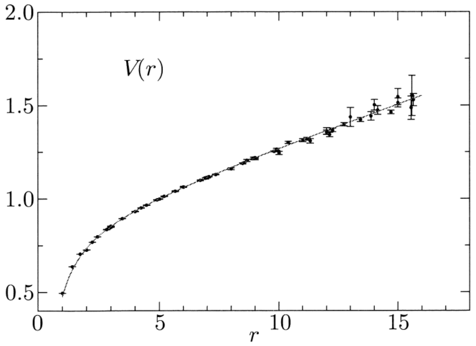


図 4　格子 QCD で計算されたクォークと反クォークの間のポテンシャルエネルギー．単位は格子間隔 a でその値は約 0.1 fm.

6. 格子ゲージ理論の 2 次相転移と連続極限

離散な格子から連続な時空を回復するにはどうすればよいだろうか．クォーク・反クォーク間のポテンシャルを例に取って考えてみよう．閉じ込めを特徴付ける弦定数 σ は長さの逆二乗の次元を持つ．格子上で次元を持つ量は格子間隔 a のみであるので，$\sigma = f(g)/a^2$（但し $f(g)$ は結合定数の関数）という関数依存性を持っているはずである．連続極限 $a \to 0$ で弦定数が有限の値に収束するには，$f(g)$ がゼロ点 g_c，即ち $f(g_c) = 0$ を持つことが必要であることが判る．

ゼロ点の意味するところは次のような考察で明らかとなる．弦定数の逆平方根 $\xi = 1/\sqrt{\sigma}$ は長さの次元を持った量であり，Wilson ループの期待値がループサイズと共に減少する割合を決める．従って，グルオン場の量子力学的な揺らぎの到達距離と考えることができ**相関距離**と呼ぶ．ゼロ点 g_c では $\xi/a = 1/f(g) \stackrel{g \to g_c}{\longrightarrow} \infty$ が成り立つので，格子間隔を単位として測定した相関距離が無限大に発散する点であることと意味する．これは統計力学でしばしばみられる現象であり 2 次相転移と呼ばれている．即ち，格子ゲージ理論の連続極限とは 2 次相転移点でのみ存在し得るということができる．

この事情を図 5 に示す．相関距離が物理的な単位で一定値を持つには，格子間隔を半分にしたとき，格子間隔を単位として測った相関距離は 2 倍になることは明らかであろう．

格子上の量子色力学の場合に 2 次相転移点はどこにあるのだろうか．様々な理論的な考察と数値シミュレーションを用いた研究により，クォークの種類が一定数を超えない限り，$g_c = 0$，即ち結合定数がゼロの

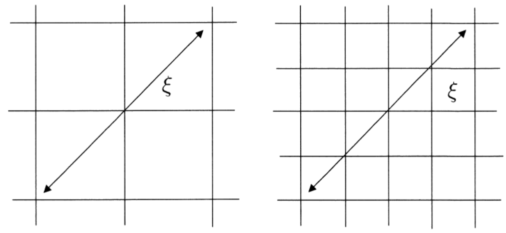


図 5　格子間隔で測った相関距離が連続極限で発散する理由.

点のみにあると考えられている．この結論も，閉じ込めと漸近自由性が同じ理論の枠内で両立することを支持しており，量子色力学の正しさの重要な証左である．

クレイ数学研究所が数学の難問から 7 つを選んでその解決にそれぞれ 100 万ドルの賞金を懸けており，Poincaré 予想を解決したロシアの Gregory Perelman が賞金の受け取りを拒否したことは最近のニュースだが，閉じ込めの数学的証明も賞金のかかった難問の一つである．

7. カイラル対称性と格子上のフェルミ粒子

連続と離散が絡む格子ゲージ理論のもう一つの重要な側面にカイラル対称性がある．電子やクォークを相対性理論に基づいて記述する場は 4 成分のスピノル量である．特に質量がゼロの場合には，$\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ という 4 行 4 列の行列の固有値 $+1$ に対応する 2 成分と，-1 に対応する 2 成分は独立になり，従って，両者に独立な位相変換を行っても作用が不変であることが知られている．さらに粒子が N_f 種類ある場合には，位相変換を N_f 種類の粒子を混合する変換に拡張することができる．

質量がゼロの場合，スピノルの 4 つの成分の γ_5 の固有状態への分解は，スピン角運動量の運動量方向への 2 つの固有状態に対応している．波動関数の位相が運動量の方向を軸にして右巻きに増えるのか，左巻きに増えるのかに対応することから，この対称性を**カイラル対称性**，γ_5 の固有値を**カイラリティ**と呼ぶ．

カイラル対称性は素粒子の相互作用の様々な側面で重要な役割を果たしている．強い相互作用に関して言えば，陽子や中性子を結び付ける力を媒介する粒子として湯川秀樹によりその存在を予言された π 中間子の性質はこの対称性により決まっている部分が大きい．この結び付きを説明するために，**カイラル対称性の自**

発的破れを説明しよう．

一般に作用が対称性を持つ場合に，その系の量子力学的な基底状態，即ち最もエネルギーの低い状態は，対称変換の下で不変な唯一の状態であるか，または対称変換の下でお互いに移り変わる集合を作るかのいずれかである．後者の場合，対称性が自発的に破れているという．南部陽一郎と Jeffrey Goldstone は，連続な対称性が自発的に破れている場合には，基底状態が連続集合を作り，それらの間にエネルギーの差はないことから，質量ゼロの粒子が出現することを示した．これを南部・Goldstone の定理と呼ぶ．

強い相互作用を記述する量子色力学では，N_f をクォークの種類（flavor 香りと呼ぶ）とすると，すべてのクォークの質量がゼロならば N_f 個の粒子に対するカイラル対称性がある．様々の理論的考察から，自然界ではこの対称性は自発的に破れており，π 中間子は，$N_f = 2$ の部分に対応する南部・Goldstone 粒子であると考えられている．実際の π 中間子はハドロンの中で例外的に軽い質量を持つ．これは，π 中間子を構成する up と down のクォークの質量が極めて軽いからであると理解できる．

格子ゲージ理論の研究が始まった 1974 年当初から，格子上ではカイラル対称性を持った作用がうまく作れないことが問題となっていた．1981 年になって，二宮正夫と Holger Nielsen が，場の量子論として妥当な仮定の下で，格子上ではカイラル対称性を持つ作用は存在しないことを数学的に証明した．この事実を Nielsen・二宮の定理と呼んでいる．

Nielsen・二宮の定理の証明は位相幾何を巧みに使っていて面白いので紹介しよう．まず定理の仮定と結論は以下のとおりである．

Nielsen・二宮の定理：格子上のフェルミ粒子の作用が，(i) 格子間隔単位の平行移動で不変，(ii) カイラル変換 $\psi_n \to \exp(i\alpha\gamma_5)\,\psi_n$ の下で不変，(iii) 近接相互作用（即ち異なる格子点間の場の相互作用は距離と共に指数関数で減衰），の 3 つの仮定を満たすならば，この作用は，カイラリティが +1 の粒子状態と −1 の粒子状態を必ず同数個記述する．

証明：フェルミ粒子の場を ψ_n とすると，条件の (i) と (ii) から，作用は $S = \sum_{n,n'} \bar{\psi}_n \gamma^\mu F_\mu(n-n')\,\psi_{n'}$ と書け，条件 (iii) から関数 $F_\mu(n-n')$ は $|n-n'| \to \infty$ で指数関数的に減少する．従って，フーリエ変換 $\tilde{F}_\mu(p) = \sum_n F_\mu(n)\exp(ipn)$ を考えるとこの量は，運動量空間である 4 次元トーラス $T^4 = \{p | -\pi < p_\mu \le \pi,\ \mu = 0,1,2,3\}$ 上で連続なベクトル場を定義する．与えられた作用にどのような粒子が対応するかは，ベクトル場のゼロ点 $\tilde{F}_\mu(p_0) = 0$ により決まる．各ゼロ点でのベクトル場の**指数**は，展開 $\tilde{F}_\mu(p) = \sum_{\nu=0}^{3} A_{\mu\nu}(p-p_0)_\nu + \cdots$ における係数行列 $A_{\mu\nu}$ を使って $sign(\det A_{\mu\nu})$ で与えられ，この値がプラスならカイラリティは +1，マイナスならばカイラリティは −1 である．ところで，Poincaré–Hopf の定理によれば，微分可能多様体上のベクトル場の指標の和は当該多様体の Euler 標数に等しい．4 次元トーラスの Euler 標数はゼロであるから，ゼロ点全体にわたるカイラリティの総和はゼロである．

カイラリティがプラスとマイナスの粒子状態が同数個あるならば，それらの間の相互作用が禁止される理由はない．従ってカイラル対称性は成り立たないという結論になる．

Nielsen・二宮の定理により，格子上ではカイラル対称性を保つ作用を書き下すことはできないと長年の間考えられていた．1992 年頃になって，David Kaplan, Herbert Neuberger と Rajamani Narayanan 等によりカイラル対称性を持つ作用を構成できることが示され大きな話題となった．ポイントは Nielsen・二宮の定理の仮定にある．顕わに書かれていないが，証明を見れば判るように，場 ψ_n が無限個の内部自由度を持つ場合に証明は成り立たない可能性がある．+1 と −1 の打ち消し合いは有限和であれば必ず成り立つが，無限和の場合は極限の取り方により必ずしも成り立たないからである．

カイラル対称性を持つ格子上の作用の構成法として，現在同値な 2 つの方法が良く知られている．一つの方法は，物理的な 4 次元時空に加えて仮構的な 5 次元目の座標軸を考え，この方向の格子点にも場が定義されるとする．5 次元方向の作用の形を適切に取れば，5 次元サイズ $L_5 \to \infty$ の極限でカイラル対称な作用が得られることを示すことができる．この方法は Domain-wall 法と呼ばれている．もう一つの方法は，Domain-wall 法から出発して，5 次元方向の格子間隔がゼロの極限を構成してしまう方法で，overlap 法と呼ばれている．1990 年代の半ばから，これらの 2 つの方法は量子色力学のシミュレーションに取り入れられるようになった．計算量が大幅に増大するためにシミュレーション

の全体にまでは普及していないが，将来の主流になっていくと考えられる．

8. まとめ

格子ゲージ理論は，紫外発散の困難を持つ場の量子論を数学的に満足のゆくように定義する方法を与えた．摂動展開に頼らずに理論の物理的内容を分析することを可能にしたことや，相転移等の統計力学と共通する考え方の重要性を明確にしたこと等，場の量子論に対する新しい見方を提供した．特に，クォークの閉じ込めのような，摂動展開では理解できない物理的に重要な現象に対して，グルオン場の相関距離に基づく理解を提供し，また数値シミュレーションにより物理量を直接計算する道を開いたことは大きな進歩であった．

一方で，格子ゲージ理論は，時空は連続なのか離散なのかといった疑問に直接応えるものではない．時空の本性を重力と結び付けて考察する研究は様々に行われており，時空を単体の集合と考えて調べる simplicial gravity 等の離散的方法は一時期大いに研究された．また最近では超弦理論の摂動展開に依存しない定式化として無限次元行列を用いる行列模型等も定式化され数値シミュレーションが行われているが，これも離散的なアプローチの一つと言えるかもしれない．今後の発展を期待して本稿を閉じることにする．

参考文献

1) 青木慎也，『格子上の場の理論』（シュプリンガー現代物理学シリーズ 3）．
2) K.G. Wilson, “Confinement of Quarks”, *Physical Review D***10**, 2445 (1974).
3) H. Nielsen, M. Ninomiya, “Absence of Neutrinos on a Lattice I—Proof by Homotopy Theory—”, *Nuclear Physics B***185**, 20 (1981).
4) David Kaplan, “A Method for simulating Chiral Fermions on the Lattice”, *Physics Letters B***288**, 342 (1992).
5) Rajamani Narayanan, Herbert Neuberger, “Chiral Fermions on the Lattice”, *Physical Review Letters* **71**, 3251 (1993).

（うかわ・あきら，筑波大学大学院数理物質科学研究科）

特集／連続から離散へ

研究はバクチである

薩摩 順吉（聞き手：編集部）

1.「連続」と「離散」という2つの見方

――今回の特集ラインアップを見ると，数学や物理の様々な分野において，「連続」と「離散」という見方ができることが窺えますが，これらの見方をすることのメリットにはどういったことが挙げられるでしょうか．

私は学生に微分方程式を教えていますが，講義のはじめにまず歴史をひとくだり話します：ニュートンはもともと天文に関する現象を説明するために運動法則を提案し，さらにそれを数学的言葉で表すために微積分の考え方を導入した．特に，加速度が力に比例し質量に反比例するという第2法則を2階の常微分方程式で表し，その解を求めようとしたのが解析学の始まりと言ってよい….



薩摩順吉氏.

ニュートンが与えたものは科学的に見て極めて大切であり，その後数百年にわたって様々な自然現象を説明してきました．理工系の大学では，まず1年生で微積分を，2年生で常微分方程式を学び，3年生で偏微分方程式に入るというコースが標準的です．ニュートンおよびその後の研究者により得られた解析的な結果を学んでいくわけです．最近は，物理だけでなく幅広い自然科学，社会科学などでも微分方程式が使われています．

変化する過程を表すのに，微積分はとても便利な道具です．そのことは間違いありません．しかし，微積分というものは極めて高級なものです．長い時間をかけて解析を勉強するのは，それだけ理解するのに時間がかかるからです．特に極限の概念を本当にわかるのはなかなか大変です．ところで，現象を数学的な式で表すとき，考えている中身は“離散的”ではないでしょうか．

連続と離散という問題に私が興味を持ち出したのは，アインシュタインのブラウン運動の理論に関する本を，京大の助手時代にセミナーで読んでからです．アインシュタインはまずランダムウォークを考え，その連続極限をとって拡散方程式までもっていきます．すなわち，右に行く確率が $\frac{1}{2}$，左

に行く確率が $\frac{1}{2}$ という条件で移動する過程を差分方程式で表し，時間間隔と空間の単位長さがそれほど大きくないとして各項をテイラー展開し，時間間隔などを0に近づける極限をとって偏微分方程式を得るわけです．後は連続変数に対する解析的な議論が進むわけですが，モデルの設定はあくまで離散的です．フーリエが拡散方程式の解を議論したときも同様です．最初にある現象を理解するときは離散的に考え，その極限として連続の議論があるわけです．

なぜすべて離散でやらないのか．それは，離散系を解析するのが非常に難しいことと，離散の式は書くのがとても面倒なものであるからです．今回の特集にも出てくる超離散系というものがあります．普通の離散系では，時空の問題の場合，独立変数にあたる時間と空間を離散として扱います．それに対して超離散系では従属変数も離散として扱います．例えば，セルオートマトンなどがそうです．

私たちは，この超離散系で現象をどこまで表せるかという研究を，ここ10年あまりやっています．超離散系の演算は足し算と max だけです．したがって「if then」の繰り返しで，見た目にはとても長い式になります．微分を使えば1行で表せる式が，超離散系では数行にわたって書かれますので，式をフォローするのが大変です．

ところで，ニュートンがもしあの極限を見つけずに，離散的な運動方程式を提案していたらどうなっていたか？ もちろん漸化式を用いて計算すれば，解は原理的に得られるはずです．計算はとても大変です．しかし，やることは連続の場合と同じです．

線形の場合だったら，離散も連続もあまり変わりはないと，私は信じています．ただ，同じ計算でも離散の場合はとても面倒です．

そういった意味で，私たちにとっては連続のほうが見やすいのですが，コンピュータにとってみると，足し算とどっちが大きいかという演算しか使わない超離散システムのほうがずっと簡単です．人間にとって複雑そうに見えるシステムは，コンピュータにとっては実に簡単なものなのです．

1960年代にコンピュータができるまでは，微積分を使って，連続的な量に対していろいろな計算がなされていました．例えば，寺沢寛一先生の『自然科学者のための数学概論』の応用編に載っているのが代表的なものですが，摂動論の重い計算がたくさんされていました．そのうちに，コンピュータが使えるようになって，研究手法が変わります．コンピュータで直接非線形な系の解の振舞いを見るということが行われるようになりました．しかし，離散的な対象を直接解析的に扱うということは扱うことはあまりやられていません．

歴史的に見ると，19世紀の数学では，微分方程式を考えるときに同時に差分方程式も考えていたと言われています．現象を捉えるため，また解の構造を知るために，いろんなタイプの方程式に注目していたのです．しかし，20世紀に入る頃からより複雑な方程式を扱うようになり，解を明示することが極めて困難になりました．

今年，インドで国際数学者会議が開催されますが，1900年の同会議におけるヒルベルトの講演から，数学は構造主義を重視する方向へ変わったと言われています．本来解析というものは現象を明らかにするものだったのが，数学的な構造を調べることに研究の中心が移りました．19世紀から20世紀への変わり目に，私たちが研究している可積分系の代表的なものであるパンルヴェ方程式の仕事があります．当時の結果を見てみると，とても大変な計算が必要であったことがわかります．また同時期に，大数学者ポアンカレはカオスを見ていたと言われますが，複雑すぎてうまく説明できないと言っていたとのことです．

その後，現象を捉える本来の意味の解析はそれほど発展しなかったとも言えます．しかし，コンピュータの登場が事態を変えました．それまで人力では不可能であった計算ができるようになりま

した．コンピュータは行き詰まっていた解析を復活させたわけです．新しく，非線形可積分系やカオス，フラクタルを含む複雑系が数学の研究対象になり始めたのです．もちろん，一貫して微積分を用いる連続系が現象のモデルとして使われていましたが，計算を実際にやるのはコンピュータであるがゆえに，離散的な式を使うことが重要になったわけです．

連続と離散のどちらが大切か．私はどちらも必要だと思います．式を書くときには，微積分を用いたほうが簡単に表せます．モデルを作るときにはこれまでお話ししたように離散のほうが分かりやすい．ただ，両者を比較したとき，“連続というのは離散からみたら近似である”ということを忘れてはなりません．

ずっと昔に山口昌哉先生が話されたのを聞いて，よく引用している式があります．それはロジスティックマップです．これは非線形の差分方程式ですが，連続極限をとるとロジスティック微分方程式になり変数分離で簡単に解けます．なお，この微分方程式の解は，新商品の売れ行きを予測できる極めて実用的なものであることを指摘しておきます．さて，イギリスの生態学者メイは，ロジスティックマップの差分方程式をコンピュータで解いて，カオスを発見しました．差分間隔を大きくすると変なことが起きる．ひょっとしたら計算を間違えて，そうした変なことを見つけたのかもしれない．“賢すぎる人”の場合は何かの間違いだとして片づけるかもしれないが，“賢くない人”はよくわからないがひょっとして面白いものかもしれないと徹底的に追及します．メイが“賢くない人”だとは言いませんが，研究に対する姿勢が大切であるいい例だと思っています．メイはその変なことからカオスの概念を提出したのです．

この例は，離散系に存在する極めて重要な現象を，近似的な連続系で失う典型的なものであると考えられます．

2. 離散的な見方の効用

――そうしますと，「連続」と「離散」の2つの見方は，これから数学や物理を研究していく上で重要になっていくと思いますが，特に大切だと言える点は何でしょうか．

そうですね．連続も離散もどちらも必要だと言いましたが，しばらく前で何かを理解するときに，人はもともと離散的に考えていて，連続的に考えているわけではないとも言いました．

ねずみの増殖のモデルもそうです．今日のねずみの数から一週間後のねずみの数を考えるとして，$f(t+\varDelta t)-f(t)$ といったような思考をしていると思うんですね．$\frac{df}{dt}$ を直接考える人もいるかもしれないけれども，ほとんどの人はやはり離散的なものの見方をしていると私は思います．

離散で考えたほうがずっと分かりやすい例を挙げておきましょう．ラプラス方程式 $\Delta u=0$ は，電磁場や流れ場の解析で重要な方程式です．この方程式の境界値問題についてはたくさんの数学的結果があります．最大値原理もその一つです．しかし，この式を離散格子で考えると，$\frac{1}{4}\{f(x+\varDelta x,y)+f(x-\varDelta x,y)+f(x,y+\varDelta y)+f(x,y-\varDelta y)\}=0$ といった簡単な形で書けるんですね．これならば中学生でもわかります．この式だと最大値原理の証明もずっと簡単です．

こうしたテーマは，おそらく連続だけでやっていたらかなり難しいものになると思います．連続の場合を理解する前に離散的な中身を考える．前に述べた，アインシュタインのブラウン運動の話や，フーリエの熱伝導の問題もそうですが，多くの現象に対する研究は，離散的な見方から入っていますし，もっと広い範囲の数学においても離散的にものを見たほうが，いろんなことの見通しがよくなるのではないかと思います．

3. 影響を受けたこと

――先生が研究者になるに当たって影響を受けたことをお聞かせ頂けますでしょうか.

私の卒業論文のタイトルは,「定常圧縮性2次元層流境界層方程式の数値解について」というもので,そのときの指導教官は山田彦児先生(現在京大で教鞭をとられている山田道夫先生のお父さん)で,コンピュータの指導は当時助教授だった上田顕先生でした.

何をやったかというと,旧ソ連の解析の大家だったオレイニクという女性数学者が境界層方程式の解の存在と一意性を証明するために使った差分方程式が数値計算に使えるかどうかを調べる研究だったわけですが,コンピュータに入力する際,紙テープを使ったことを今でもよく覚えています.たいした内容ではありませんが,オレイニクの論文を読んだとき,解析の仕事で,差分を使うと大変見通しがよくなるという印象を持ちました.

私のいた学科は,数学,物理,機械,電気,航空などいろんな分野の人が集まっていました.理工学部すべての寄せ集めのような風で,教育環境は非常に良かったのではないかと思います.なぜかというと,学生時代にいろんなことをやっておくと,どんな新しいことにも躊躇なく入っていけるという利点があります.また,学問の内容はどこにいっても,どんな分野でもたいした違いはないことがわかります.面白いものは面白いのですから,先生は人で選ぶことが大切だと思いました.

ところで,山田先生は京大物理の出身で,指導教官は玉城嘉十郎という先生でした.1年先輩に湯川秀樹・朝永振一郎がいたとのことです.玉城先生は「私は何も指導することがないから好きなことをやりなさい」と研究室の学生に言ったそうです.そこで,良くできた湯川・朝永が,当時まだ日本にもあまり広がっていなかった量子力学の本をドイツから仕入れて勉強したそうです.そうした環境が後のノーベル賞につながったと言えるかもしれません.

私は山田先生を指導教官に選びましたが,恩師山田先生もその恩師の玉城嘉十郎先生と同じで,好きなことをやらせてくれました.面倒見が良いというより,自由に勉強させてくださった,と言ったほうがよいかもしれません.

修士のときは山田先生は退官されていて,上田先生が教授になられ,やはり好きなことを自由にやらせてくださいました.指導というのはそういうものが一番いいとつくづく思いますね.修士論文は「乱流拡散の計算機実験」で,ランダムウォークに関するものでした.こうして見てみると,私は卒論が離散で,修論が超離散だったことになりますね.私は離散から連続に入りましたから,非常にいい土台を築けたと思います.

私が修士の頃は学生運動真っ盛りでした.当然大学での講義などはほとんどありませんでした.ただ,今考えると,その時代の人たちが現在,研究・教育で非常に活躍されていますから,大学の教育というのは何なのか,ということも考えさせられますね.

そして,私の人生で一番の恩師といえる方は矢嶋信男先生です.上田先生が教授になられたときに助教授として研究室に着任されました.矢嶋先生は,阪大で伏見康治先生の下で学ばれました.京大を去られた後,九大の応用力学研究所の所長もされています.

矢嶋先生は私のことを非常に心配してくれました.博士課程に進学しても,テーマとしていた乱流について,何も結果を出せないでいたからです.非線形波動をやったらどうか,ということで,矢嶋先生と同じ研究室の1年後輩である及川正行さんの3人で書いた論文が最初のものの一つになりました.及川さんはその後九大教授になられています.

私はD3まで論文がゼロでしたので,就職は当然難しく,そのままオーバードクターになりました.子供も生まれていましたので生活も大変でしたが,矢嶋先生が九大に行かれた後くらいから,自

分で仕事もできるようになって，論文も８つぐらい書けました．そのうちに，とあることから助手のポストが空いて，そこに入れて頂きました．

研究で一番大きな影響は，矢嶋先生と論文を書いてスタートできたことですね．二人で書いた（というより先生の指導の下，言われるがままにやった）論文に，非線形シュレーディンガー方程式の初期値問題に関するものがあります．これは演習問題を解いただけと言ってもよいものですが，運良く８年後ぐらいに実験に引っかかったのです．その論文に手で書いたグラフが，光ファイバー中のソリトン伝搬の実験で観測され，新しいということで注目されました．ですから，物事は時期とかタイミングというのもありますよね．

また，矢嶋先生が九大に行かれた後の頃の論文に，“広田の方法”を扱ったものもあります．ちょうど立命館大に広田良吾先生が来られている頃で，広田先生にいろいろとご教示いただいて，KP 方程式の解を広田の方法で求めたものを論文にしました．この論文は自分一人で書いた最初の論文になりました．これが縁で，広田先生ともいろいろ仕事をさせていただき，そういう中で広田先生のセンスを学ばせてもいただきました．

その後，矢嶋先生経由でアメリカに来ないか，というお話があって，１年行って一度日本に戻り，その後もう一度２年も行かせてもらえました．こういうことは今の時代では難しいことではないかと思います．

アメリカに行って帰ってきたぐらいの頃に，佐藤幹夫先生と出会いました．２回目のアメリカ行きの後，滞米中に得た結果を，当時大学の先輩の三村昌泰さんがいた広島大のセミナーで話したのですが，質問は方程式に含まれる特異積分の存在条件だけで，解については何ら興味を持ってもらえず，落胆しておりました．その一週間後，京都の佐藤先生のセミナーで，同じ内容を話したら，佐藤先生は「そんな条件などどうでも良い．解が面白かったら条件を拡張したらいい」とおっしゃったのです．目から鱗でした．

数学の定理というのは，臆病な定理だと私は思います．要するに，条件がどこまで必要かということを考えるのがもっとも大切で，数学はそのように進化してきたのです．佐藤超函数というのは，まさにそういう条件を拡張してできたものでした．佐藤先生の発言は，私にとって本当に強烈でした．

佐藤先生は“関数”を“函数”と書くことにこだわりをもっておられますが，「函数は生きている．オイラーに帰れ」という主張をよくなさっています．こうした研究がある時期までの数学の本流だったわけですが，それが限界に達したため，構造主義に走ることになった，という話は先ほどしました．が，とにかく，佐藤先生には感激しますよ．佐藤先生は 1500 時間もポケコンで計算されていますが，これはすごいことです．

佐藤先生との出会いによって，私は数学をやることに安心感を得ました．自分のやっていることは決していかがわしいものではなくて，ちゃんとしたことなのだということを，佐藤先生は教えてくれました．数学に関して佐藤先生から受けた影響はそれだけに大きかったです．

それと戸田盛和先生との出会いも大きいです．佐藤先生が日本最大の数学者だとすれば，戸田先生はすべてを見渡せる最後の物理学者だと思います．同じようなタイプの物理学者としてランダウがいましたが，今の日本にはこういう方はなかなかいらっしゃらないのではないかと思います．

戸田先生との出会いによって，私は，自分が育ってきた環境や研究に対する感覚が決して悪いものでなかったということを再確認できました．教育とは何かということや，分かりやすい本を書くことも研究者として重要であることを学びました．

だから，私は，「自分だけが納得するような本は書くな」とよく言います．AMS（アメリカ数学会）などの「論文の書き方」などを見ると，数学の論文には主張をあまり入れてはいけないと書かれていますが，教育的な本ではやはり本の中に主張を

入れないといけないと私は思いますね．

4. メッセージ

――今後，研究者を目指す方や学生さんへのメッセージをお願いします．

今，本や論文を書くときの姿勢の話をしましたが，論文を読む姿勢について「数学の論文を読むときは，さらに何ができるかを考えながら読みなさい．物理の論文を読むときは，本当でないかもしれないから懐疑心をもって読みなさい」というものがあります．

数学の論文の中身は信じることはできるけれども，それだけで納得しても何も新しいことは生まれません．論文の先，どこまでできるかということを考えるのが重要なのだと思います．

物理の論文の例では面白い話があります．昔，東大工学部物理工学科にいた頃，お茶飲み場で超伝導の話を聞きました．ある若い極めて優秀な人が超伝導理論（BCS 理論）について丁寧に話をしてくれ，だから絶対温度で 4 度以上の超伝導はないと断言して話が終わりました．ところが，その一週間後に，物理工学科で例の高温超伝導が発見されて大騒ぎになったのです．

ですから，理論というのはあくまで理論なわけで，納得するだけなら賢い人は誰でもできるわけです．賢いとそれを簡単に認めてしまうのでよくないと私は思うんですね．面白い仕事は阿呆でないとできないと私はよく言います．納得するだけだったら論文解読だけの仕事になってしまい，面白いことはできません．さらに何かセンスがあったとき，本当に面白いものができると思います．どうでしょうか．ただ，こういうことをどのように教育するかは難しいことです．

あと，学生はもう少し計算に取り組んでほしいのと，本を持ってほしいです．演習の際に，電子手帳の公式集とかを見ながら，当てはめるものを探している学生をよく見ます．ところが，本当の仕事というのは，佐藤先生や広田先生の例を見てわかるように，ものすごい量の計算の結果，得られるものです．計算をしないと私たちはものをしゃべれません．アインシュタインは，1 年間に自分の背丈にもなる計算用紙をためたといいますが，天才というのは，それだけ頑張れる人なのではないかと思います．手を動かすこと．とにかく手を動かして計算しないと，数理系の学問では何も見えてこないです．私も学生のときに使っていた本はボロボロです．数学に王道はないと言いますが，まさにその通りです．格好よく勉強できる学問なんてないと思います．大変な計算をしないと新しいことは全く生まれてきません．

もう一つ，本当にできる人は謙虚です．私の先生はみんな謙虚です．偉ければ偉いほど謙虚ですね．

そして，最後に，私のモットーになりますが，研究はバクチである，ひいては人生はバクチであるということです（笑）．

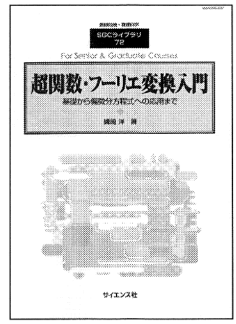
せっかく面白い研究をやろうとしても，今は就職難などで大変な時代だと思いますが，本当に面白い仕事というのは，10 年ぐらいのタイムスパンで打ち込める環境をつくり，その中でできるかどうか分からない仕事です．できない確率のほうがずっと高いけれど，そういう結果として面白い仕事ができる．できなくても，仕事に打ち込んだ 10 年の経験は何らかの形で役に立つ．だから，バクチを打ちなさい．そう言いたいですね（笑）．

100 人いれば，99 人ノーベル賞をもらい損ねて，1 人だけがもらっている．面白い研究というのはそういうものだとも思います．もらわなかったからダメじゃなくて，その人がどれだけ一生懸命やったか，ということではないでしょうか．

――本日は貴重なお話をお聞かせ下さり，誠にありがとうございました．

(2010 年 5 月，
青山学院大学相模原キャンパス研究室にて)

（さつま・じゅんきち，青山学院大学理工学部）



超関数・フーリエ変換入門
基礎から偏微分方程式への応用まで

磯崎洋著，B5 判，168 頁，本体 1857 円，サイエンス社

この本は，臨時別冊・数理科学 2010 年 3 月号（SGC ライブラリ 72）として刊行されたものである．書名が表す通り，超関数とフーリエ変換の理論の入門的な解説を主な目的として書かれている．

$\boldsymbol{R}^n$ 上の可積分関数 f のフーリエ変換 $\mathcal{F}f$ は

$$(\mathcal{F}f)(\xi)=(2\pi)^{-n/2}\int_{\boldsymbol{R}^n}e^{-ix\cdot\xi}f(x)\,dx$$

で定義される $\boldsymbol{R}^n$ 上の関数である．もし $\mathcal{F}f$ も $\boldsymbol{R}^n$ 上可積分ならば，それに逆フーリエ変換 $\mathcal{F}^{-1}$ を施すと

$$(2\pi)^{-n/2}\int_{\boldsymbol{R}^n}e^{ix\cdot\xi}(\mathcal{F}f)(\xi)\,d\xi=f(x)$$

という重要なフーリエの反転公式が得られる．左辺は $(\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f))(x)$ を表している．また，フーリエ変換は微分演算と相性が良く，例えば $f\in C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ で，任意の多重指数 α, β に対して $x^\alpha(\partial_x^\beta f)(x)$ が $\boldsymbol{R}^n$ 上有界であるような，いわゆる急減少関数を考えると，$(\mathcal{F}(\partial_x^\alpha f))(\xi)=(i\xi)^\alpha(\mathcal{F}f)(\xi)$ が成立する．以後，$\boldsymbol{R}^n$ 上の急減少関数全体を $\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$ で表す．これらの有用な事実が利用できるものとして発見法的に議論すると，熱方程式の初期値問題 “$\partial_t u(t,x)=\Delta_x u(t,x)$ $(t>0)$, $u(0,x)=f(x)$” は，フーリエ変換を用いて次のように解ける：$u(t,x)$ の変数 x に関するフーリエ変換を $\hat{u}(t,\xi)$ で表すと，上記の初期値問題は x に関するフーリエ変換により “$\partial_t\hat{u}(t,\xi)=-\xi^2\hat{u}(t,\xi)$ $(t>0)$, $\hat{u}(0,\xi)=(\mathcal{F}f)(\xi)$” と書き換えられ，$\xi$ を固定して考えると，それは常微分方程式の初期値問題であり，$\hat{u}(t,\xi)=e^{-t\xi^2}(\mathcal{F}f)(\xi)$ のように容易に解けるものとなる．ここで，f, $g\in\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$ に対して $(\mathcal{F}^{-1}(fg))(x)=(2\pi)^{-n/2}(\mathcal{F}^{-1}f)*(\mathcal{F}^{-1}g)(\xi)$ が成立することを利用すると，変数 ξ に関する逆フーリエ変換により，$t>0$ のとき

$$u(t,x)=(U_t*f)(x)=\int_{\boldsymbol{R}^n}U_t(x-y)f(x)\,dx$$

と解ける．但し，$U_t(x)=(2\pi)^{-n/2}(\mathcal{F}^{-1}e^{-t\xi^2})(x)=(4\pi t)^{-n/2}e^{-x^2/(4t)}$ は熱核，$*$ は合成積と呼ばれる．

この解法の鍵は熱核 $U_t(x)$ の求め方にある．ここで超関数の概念を導入すると，$U_t(x)$ は熱方程式の初期値問題の基本解と解釈される：$\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$ 上の連続な線形汎関数のことを $\boldsymbol{R}^n$ 上の緩増加超関数といい，その全体を $\mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^n)$ で表す．$f\in\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$ に対して

$$\langle T_f,\phi\rangle=\int_{\boldsymbol{R}^n}f(x)\phi(x)\,dx\quad(\phi\in\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n))$$

で $T_f\in\mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^n)$ を定義し，f と T_f を同一視することにより，超関数は関数の概念を拡張したものと捉えられる．このとき，熱方程式の初期値問題の基本解 $U_t(x)$ は “$\partial_t U_t(x)=\Delta_x U_t(x)$ $(t>0)$, $U_0(x)=\delta(x)$” の超関数解として導入される．但し，$\delta(x)\in\mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^n)$ はディラックの δ 関数で，$\langle\delta,\phi\rangle=\phi(0)$ $(\phi\in\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n))$ で定義される．フーリエ変換は $\mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^n)$ にまで拡張されるので，$U_t(x)$ を $\mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^n)$ に属するものとして解こうとするとき，そのフーリエ変換 $\hat{U}_t(\xi)$ の満たすべき方程式は “$\partial_t\hat{U}_t(\xi)=-\xi^2\hat{U}_t(\xi)$ $(t>0)$, $\hat{U}_0(\xi)=(\mathcal{F}\delta)(\xi)=(2\pi)^{-n/2}$” となり，その解 $\hat{U}_t(\xi)=(2\pi)^{-n/2}e^{-t\xi^2}$ の逆フーリエ変換として $U_t(x)$ が求められる．

以上のことはこの本の内容の断片に過ぎないが，フーリエ変換・超関数の効能を端的に表す例であるので，評者による表現は拙いがあえて述べた．この本の概要の一端を掴む一助となれば幸いである．上では緩増加超関数についてのみ述べてきたが，Ω を $\boldsymbol{R}^n$ の開集合として，$C_0^\infty(\Omega)$ 上の連続な線形汎関数として定義される，Ω 上の超関数も取り扱われている．理論は 1 変数の場合と多変数の場合とに分けて書かれているので，特に初学者は 1 変数の場合についてよく読んで，計算や理論の運用に慣れるようにすると良い．取り上げられた例は多く，計算方法などは詳述されているので，非常に勉強しやすいものになっている．また，偏微分方程式への応用については，上では放物型方程式のみ触れたが，この本では楕円型方程式，双曲型方程式について詳述されている．特に後者については超局所解析の入門的解説にもなっている．豊富な内容を非常にテンポ良く取り扱った良書であることは間違いない．

足立 匡義（神戸大学理学部）

「数理科学」は語る

30年前から現代へのメッセージ

松田 博嗣

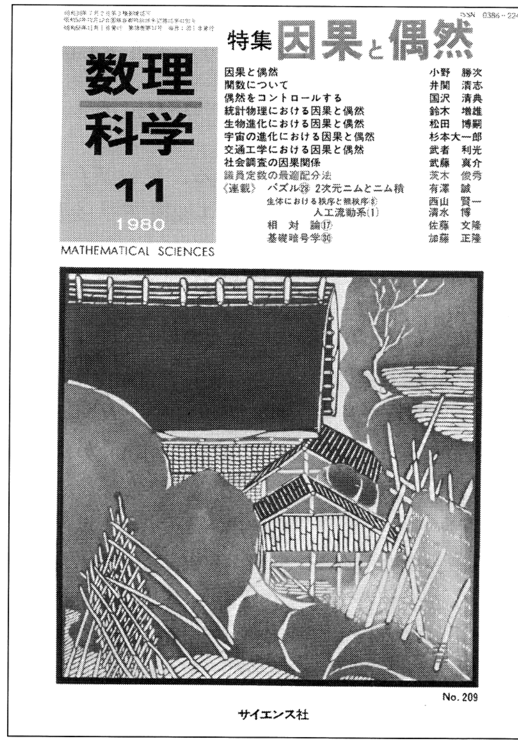
1980年11月号

「何の因果でこの破目に」，昔は因果応報は神や自然への畏れであったが，今では人間が因果を調べて，将来を予測したり，それを都合のよいように利用するようになってきた．しかし，因果関係の見極めは容易ではない．見誤ると，とんでもない回り道になったり，禍を招いたりすることもある．数理科学は因果と偶然をどう客観的に表現するかを通じて発展してきたとも言える．

本誌でも30年前の1980年に「因果と偶然」をテーマに特集が組まれ，私は「生物進化」に関連した小文を書いた．察するに，その頃にはJ.L. モノーの「偶然と必然」が和訳され良く読まれていたことや，集団遺伝学者木村資生がモノーに書かれているような自然選択を要因とする通念に反して，分子進化の中立説を提唱し，賛否両論活発で，注目を集めていたことも影響したであろう．このような進化の要因論は，その後目覚しく発見される新事実の前に影薄れてはいるが，まだ解決していない．いずれまた数理科学の研究としても復活することを期待したい．

17世紀のニュートンの頃は言うに及ばず，20世紀前半までは，すぐれた数学者は同時にすぐれた科学者でもあった．研究が多岐にわたり，分業が進んだ現在，並の数理科学者はどう生きるべきか？ 狭い分野に閉じこもって業績を上げる方向が手堅いと思われるようであるが，長い目で見てそれが誰にとっても得策かどうかは判らない．あまり他人がいない分野のほうが，進歩に貢献できる可能性も少なくない．

現在，地球温暖化，CO_2 濃度上昇危機説が大きな政治的問題になっている．CO_2 濃度上昇が原因で温暖化が起こったとする説とそれは逆だとする説の間で激論が交わされている．地球物理学，気象学には多くの研究の蓄積や研究者の数も少なくないが，激論は100年先の予測の問題であって，まだ専門家も少ない．気象学の基礎理論は流体力学と熱力学であるが，まだ分子論的取扱いはほとんどない．ここでは偶然を含む過程のために発達した確率過程論や分子動力学的手法もまだあまり取り入れられていない．元気のよい研究者がもっとこのような新分野の開拓に関心を持たれることを念願している．



（まつだ・ひろつぐ，九州大学名誉教授）

情報幾何の新展開
脳と情報の数理科学
第2回

凸関数の導くダイバージェンスとリーマン幾何

甘利 俊一

今回は工学問題によく出てくる凸関数を取り上げ，そこから2点間のダイバージェンスが自然に導かれることを示す．これはBregmanのダイバージェンスとも呼ばれる．ここにはルジャンドル変換を介しての双対性がある．さらに，ダイバージェンスからリーマン空間，そして平坦性へと導いていく．

2.1 凸関数とダイバージェンス

多様体 S 上に微分可能な凸関数 $\psi(\boldsymbol{x})$ が与えられたとしよう．凸関数はその2階微分（ヘッシアン）

$$H(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \psi(\boldsymbol{x}) \right) \tag{2.1}$$

が正定値行列である．ここで，座標系として $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ を用いた*1)．凸関数の例はいろいろある．例えば，

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2} \sum x_i^2 \tag{2.2}$$

は，ユークリッド空間の原点からの距離の2乗であり，ヘッシアンは単位行列である．確率変数を $\boldsymbol{x}$ とする指数型分布族

$$p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}) = \exp\left\{ \sum \theta_i x_i - \psi(\boldsymbol{\theta}) \right\} \tag{2.3}$$

は $\boldsymbol{\theta}$ を座標系とする多様体であるが，規格化定数に対応する $\psi(\boldsymbol{\theta})$ は，

---

*1) 多様体上の関数 f が凸という概念は不変ではない．仮に座標系 $\boldsymbol{x}$ を用いて $f(\boldsymbol{x})$ が凸であったとしても，他の座標系 $\boldsymbol{y}$ を用いてこの関数を表せば，$f\{\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y})\}$ は $\boldsymbol{y}$ の関数として凸になるとは限らないからである．しかし，座標変換をアファイン変換に限れば，凸関数は他の座標系でも凸である．したがって，凸概念はアファイン変換の範囲で意味をなす概念である．

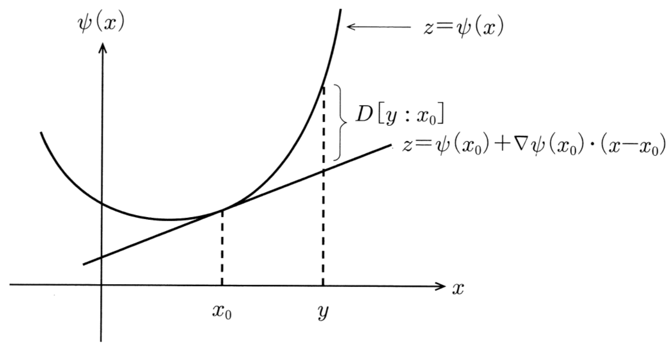


図 2.1　凸関数によるダイバージェンス．

$$\psi(\boldsymbol{\theta}) = \log \int \exp\left\{\sum \theta_i x_i\right\} d\boldsymbol{x} \tag{2.4}$$

のように書けるが，これは $\boldsymbol{\theta}$ の凸関数であることをあとで見る．この他，確率分布族の空間 S では，エントロピーは凹関数，したがってエントロピーの符号を変えた

$$\varphi(\boldsymbol{p}) = \sum p_i \log p_i \tag{2.5}$$

は $\boldsymbol{p}$ の凸関数である．

$\boldsymbol{x}$ の凸関数 $z=\psi(\boldsymbol{x})$ をグラフに書いてみよう．1 点 $\boldsymbol{x}$ において，このグラフに接する超平面を描く．図 2.1 は 1 次元の場合であるが，多次元の場合も容易に類推できよう．関数が凸である以上グラフは必ずこの接超平面より上にある．そこで，$\boldsymbol{y}$ 点でこれがどのくらい上にあるかを計る．$\boldsymbol{x}_0$ 点で $z=\psi(\boldsymbol{x})$ に接する接超平面の方程式は，z を縦軸として，

$$z = \psi(\boldsymbol{x}_0) + \nabla\psi(\boldsymbol{x}_0)\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0) \tag{2.6}$$

である．ここで $\nabla\psi(\boldsymbol{x})$ は関数 ψ のグラディエントで，$\partial\psi/\partial x_i$ を成分とするベクトルである．だから，接平面の $\boldsymbol{y}$ 点での値は

$$z(\boldsymbol{y}) = \psi(\boldsymbol{x}_0) + \nabla\psi(\boldsymbol{x}_0)\cdot(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}_0) \tag{2.7}$$

である．関数 $\psi(\boldsymbol{x})$ が $\boldsymbol{y}$ 点で接平面のどのくらい上にあるか，このずれは

$$D[\boldsymbol{y}:\boldsymbol{x}_0] = \psi(\boldsymbol{y}) - \psi(\boldsymbol{x}_0) - \nabla\psi(\boldsymbol{x}_0)\cdot(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}_0) \tag{2.8}$$

と書ける．これを凸関数 $\psi(\boldsymbol{x})$ から導かれる $\boldsymbol{y}$ から $\boldsymbol{x}_0$ へのダイバージェンス（分離度）と呼ぼう*2)．$\boldsymbol{x}_0$ の代わりに $\boldsymbol{x}$ を用い，$D[\boldsymbol{y}:\boldsymbol{x}]$ を使う．(2.2) からはユークリッド距離の 2 乗

$$D[\boldsymbol{y}:\boldsymbol{x}] = \frac{1}{2}\sum (x_i - y_i)^2 \tag{2.9}$$

*2)　これは，昔 Bregman がソ連の会議で発表し[1]，最適化の手法に使ったのでブレグマン・ダイバージェンスと呼ばれる．実は，情報幾何では空間の双対平坦性からこれが自動的に導ける．そこでは双対性を含めて，幾何学的性質が詳しく調べられていることを後に見る．

が導かれる．

離散確率分布空間 S_n は指数型分布族である．すなわち

$$p(x;\boldsymbol{\theta}) = \exp\left\{\sum \theta_i \delta_i(x) - \psi(\boldsymbol{\theta})\right\}, \tag{2.10}$$

$$\theta_i = \log p_i, \quad i = 1, \cdots, n \tag{2.11}$$

のように書ける．この場合，規格化定数に対応する

$$\psi(\boldsymbol{\theta}) = -\log p_0 = -\log\left(1 - \sum p_i\right) = -\log\left(\sum e^{\theta_i}\right) \tag{2.12}$$

は，凸関数である．そこから得られるダイバージェンスは，計算を実行すると

$$D[\boldsymbol{p} : \boldsymbol{q}] = \sum_{i=0}^{n} p_i \log \frac{p_i}{q_i} \tag{2.13}$$

となって，これはKLダイバージェンスに他ならない*3)．

2.2 凸関数とリーマン計量

ダイバージェンス $D[\boldsymbol{x} : \boldsymbol{y}]$ で，$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x}$ とおけば，微小線分 $d\boldsymbol{x}$ のダイバージェンスが導かれる．これを $d\boldsymbol{x}$ の長さの2乗とすると，簡単な計算によって

$$D[\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x}] = \frac{1}{2}\sum \partial_i \partial_j \psi(\boldsymbol{x}) dx_i dx_j \tag{2.14}$$

であることが分かる．ここで偏微分 $\partial/\partial x_i$ を ∂_i と略記する（これはグラディエント ∇ である）．ψ は凸関数だから，その2階微分であるヘッシアン $\partial_i\partial_j\psi$ は確かに正定値行列である．このような空間 S をリーマン空間と呼び，その2次形式の作る行列 $G = (g_{ij})$ をリーマン計量と呼ぶ．これは点 $\boldsymbol{x}$ に依存してよい．計量は

$$g_{ij}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\partial_i \partial_j \psi(\boldsymbol{x}) \tag{2.15}$$

である．

2.2.1 Legendre 変換と双対性

凸関数 $\psi(\boldsymbol{x})$ が与えられたときに，その微分，つまりこの関数の接超平面の勾配（接超平面の法線ベクトル）は，(2.6) からわかるように

$$\boldsymbol{x}^* = \nabla\psi(\boldsymbol{x}) \tag{2.16}$$

である．図 2.1 からわかるように，その接超平面の傾きは，点 $\boldsymbol{x}$ が変われば必ず変わる．言い換えれば，上式の $\boldsymbol{x}$ から $\boldsymbol{x}^*$ への変換は1対1で逆変換も存在する．したがって，$\boldsymbol{x}$ が多様体 S の座標であるなら，$\boldsymbol{x}^*$ も座標として使って

*3) エントロピーの符号を変えた，$f(\boldsymbol{P}) = \sum p_i \log p_i$ は凸関数である．ここから得られるダイバージェンスも KL ダイバージェンスで，順序が変わって $KL[\boldsymbol{p} : \boldsymbol{q}]$ である．これは偶然ではなくて，双対性から出てくることをこれから見る．

よい．したがって，ここでは S の 2 つの座標系が得られる．

変換 (2.16) を Legendre 変換と言う．この変換は双対である．つまり，

$$\psi^*(\boldsymbol{x}^*) = \max_{\boldsymbol{y}} \{\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x}^* - \psi(\boldsymbol{y})\} \tag{2.17}$$

によって，新しい $\boldsymbol{x}^*$ の関数 ψ^* を定義しよう．これを $\boldsymbol{x}^*$ で微分してみると，

$$\nabla\psi^*(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{x} \tag{2.18}$$

であるから，これが $\boldsymbol{x}^*$ から $\boldsymbol{x}$ への逆変換になっている*4)．さらに微分すれば，ヘッシアン

$$G^*(\boldsymbol{x}^*) = \nabla\nabla\psi^*(\boldsymbol{x}^*) \tag{2.20}$$

は，前のヘッシアン G の逆行列になっている*5)．だから，ψ^* は凸関数で，この凸関数と座標系 $\boldsymbol{x}^*$ とで，ダイバージェンスが作れる．この双対ダイバージェンスは

$$D^*[\boldsymbol{y}^* : \boldsymbol{x}^*] = \psi^*(\boldsymbol{x}^*) - \psi^*(\boldsymbol{y}^*) - \nabla\psi^*(\boldsymbol{y}^*) \cdot (\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{y}^*) \tag{2.22}$$

のように書ける．

しかし，計算してみると $\boldsymbol{x}$ 点（$\boldsymbol{x}^*$ 点）と $\boldsymbol{y}$ 点（$\boldsymbol{y}^*$ 点）の 2 つのダイバージェンスは

$$D^*[\boldsymbol{x}^* : \boldsymbol{y}^*] = D[\boldsymbol{y} : \boldsymbol{x}] \tag{2.23}$$

となっている．だから座標系によらず実質は一つのダイバージェンスしかなくて，ただ変数の順序を変えたものになっている．

座標系 $\boldsymbol{x}^*$ と凸関数 ψ^* から出発すればその双対として元の $\boldsymbol{x}$ と ψ が得られる．これがまさに“お互い様”の関係にある双対性である．ダイバージェンスの非対称性に関わるもやもやもこれで解消する．ダイバージェンスの順序を変えたものは実は双対ダイバージェンスである．

2.3 ダイバージェンスとリーマン幾何：接空間

ダイバージェンス関数からは，微小な 2 点 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x}$ の間に 2 乗距離

$$ds^2 = \sum g_{ij}(\boldsymbol{x}) dx_i dx_j \tag{2.24}$$

---

*4) (2.17) で最大値を達成する $\boldsymbol{y}$ は，max の内部を $\boldsymbol{y}$ で微分して 0 とおけば得られる．これは (2.16) より，$\boldsymbol{x}^*$ の元の座標での値 $\boldsymbol{x}$ で達成される．したがって，

$$\psi^*\left(\boldsymbol{x}^*\right) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}^* - \psi(\boldsymbol{x}). \tag{2.19}$$

これを $\boldsymbol{x}^*$ で微分すれば (2.18) が出る．

*5) (2.15), (2.16) より $G = \partial\boldsymbol{x}^*/\partial\boldsymbol{x}$，また $G^* = \partial\boldsymbol{x}/\partial\boldsymbol{x}^*$，だから行列 G と G^* は

$$G\left(G^*\right)^{-1} = I \tag{2.21}$$

を満たし，たがいに逆行列である．

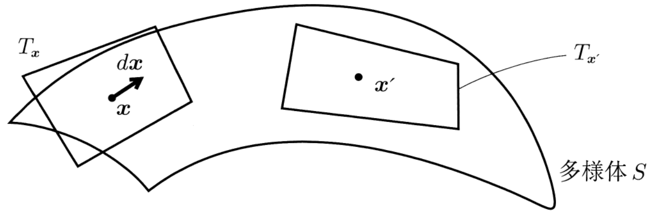


図 2.2　接空間.

が導入されることを見た．空間の各点 $\boldsymbol{x}$ に，正定値行列 $G = (g_{ij}(\boldsymbol{x}))$ が定義され，微小線素 $d\boldsymbol{x}$ の長さの 2 乗が上式で与えられる空間をリーマン空間と呼ぶ．

ユークリッド空間では，正規直交座標をとれば，微小な線素 $d\boldsymbol{x}$ の距離の 2 乗はピタゴラスの定理によって

$$ds^2 = \sum dx_i^2 \tag{2.25}$$

と書ける（dx_i はこの場合は微小でなくともよい）．これは，行列 G がどの場所 $\boldsymbol{x}$ でも単位行列 I に等しい場合である．空間がユークリッド的であるときでも，極座標 (r, θ) を用いれば微小な線素の長さの 2 乗は，

$$ds^2 = dr^2 + r^2 (d\theta)^2 \tag{2.26}$$

であるから，この場合行列 G は

$$G(r, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix} \tag{2.27}$$

となる．しかし，これは座標系を変えることによって，単位行列にできる．

どのような座標系をとっても単位行列にできない空間は本質的にユークリッド的ではない．その判定法は，局所的には曲率を計算すればできる（ここではふれない）．もっとも，これは局所的な話で，例えば，シリンダー（円筒）などは，局所的にはユークリッド計量を持ち，$G = I$ とできるが，大域的にはぐるっと回ってくっついているので，ユークリッド空間ではない．

リーマン空間の接空間について，ここで少し説明しておこう．空間は一般に“曲がって”いる．例えば，球面は曲がった 2 次元の空間である．でも，1 点 $\boldsymbol{x}$ のごく近くでは，これを平面で近似できる．我々の地上では，あたかも地球は平面のように見える．1 点の近傍で，これを線形空間で近似したものを接空間と言う（図 2.2）．各点に別々の接空間があるから，$\boldsymbol{x}$ での接空間を $T_{\boldsymbol{x}}$ と書く．$\boldsymbol{x}$ 点から出る微小ベクトル $d\boldsymbol{x}$ は，ベクトル空間 $T_{\boldsymbol{x}}$ に属すると見てよい．ずれが大きくなり，微小でなくなれば，接空間と多様体とは離れてしまう．

ベクトル空間は基底ベクトルで張られる．いま，座標軸に沿った接線方向のベクトルを基底ベクトルとし，第 i 座標軸方向の基底ベクトルを $\boldsymbol{e}_i$ と書こう（図 2.3）．そうすれば，微小ベクトル $d\boldsymbol{x}$ は

$$d\boldsymbol{x} = \sum dx_i \boldsymbol{e}_i \tag{2.28}$$

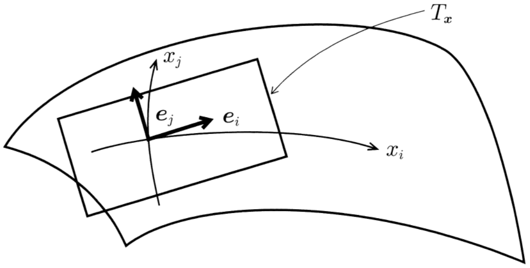


図 2.3　接空間 $T_{\boldsymbol{x}}$ と自然基底 $\{\boldsymbol{e}_i\}$.

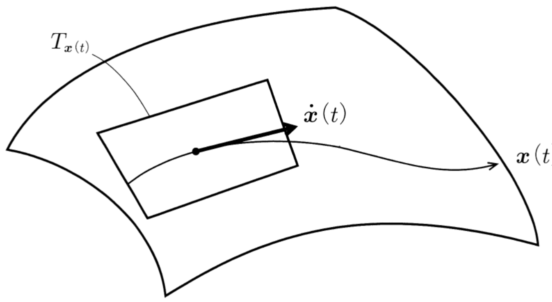


図 2.4　曲線 $\boldsymbol{x}(t)$ の接ベクトル $\dot{\boldsymbol{x}}(t)$.

のように基底の一次結合で書ける．

一般に接空間のベクトルは微小でなくともよい．例えば，接空間のベクトル $\boldsymbol{Y}$ を

$$\boldsymbol{Y} = \sum Y_i \boldsymbol{e}_i \tag{2.29}$$

と書いたとき，Y_i はその成分である．多様体上の曲線 $\boldsymbol{x}(t)$ を考えよう．t は曲線のパラメータで，t に従って，点 $\boldsymbol{x}$ が変化していく．このとき，曲線の接ベクトルは，

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \sum \frac{dx_i(t)}{dt} \boldsymbol{e}_i \tag{2.30}$$

と書ける（図 2.4）．この接ベクトルの長さの 2 乗は

$$\|\dot{\boldsymbol{x}}\|^2 = \sum g_{ij} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt}. \tag{2.31}$$

ベクトルの長さが計れるということは，ベクトル空間に内積が定義されたということで，今の場合，基底ベクトルの内積が

$$g_{ij}(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{e}_j(\boldsymbol{x}) \rangle \tag{2.32}$$

となっている．こうすれば，微小ベクトルの内積は

$$\langle d\boldsymbol{x}, d\boldsymbol{x} \rangle = \left\langle \sum dx_i \boldsymbol{e}_i, \sum dx_j \boldsymbol{e}_j \right\rangle = \sum g_{ij} dx_i dx_j \tag{2.33}$$

となるから，話のつじつまが合う．基底ベクトル系 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ は，座標系の座標軸 x_i に沿った自然基底と言う．数学者は多様体上の関数 $f(\boldsymbol{x})$ を考えて，座標軸

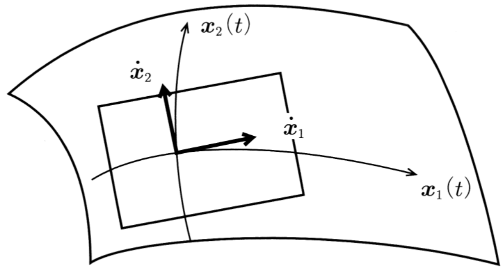


図 2.5　は直交する 2 曲線 $\boldsymbol{x}_1(t)$ と $\boldsymbol{x}_2(t)$.

に沿った微分オペレータ $\partial/\partial x_i$ と $\boldsymbol{e}_i$ を同一視する．すると，曲線に沿った点の微分は，この曲線方向での微分であるから，

$$\dot{\boldsymbol{x}}f(\boldsymbol{x}) = \frac{d}{dt}f(\boldsymbol{x}(t)) = \sum \frac{\partial}{\partial x_i}f(\boldsymbol{x})\frac{dx_i}{dt} \tag{2.34}$$

となってつじつまが合う[*6)]．

接空間のベクトル $\boldsymbol{X}$ の長さの 2 乗は

$$\|\boldsymbol{X}\|^2 = \langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}\rangle = \sum g_{ij}X_iX_j \tag{2.35}$$

であった．2 つのベクトル，$\boldsymbol{X}$ と $\boldsymbol{Y}$ は，その内積が 0 のとき，すなわち

$$\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}\rangle = \sum g_{ij}X_iY_j = 0 \tag{2.36}$$

なら直交するという．2 つの曲線 $\boldsymbol{x}_1(t)$ と $\boldsymbol{x}_2(t)$ があって，$t=0$ で交わっていたとする．すなわち

$$\boldsymbol{x}_1(0) = \boldsymbol{x}_2(0). \tag{2.37}$$

このとき，もし曲線の接ベクトルどうしが直交していれば，すなわち

$$\langle \dot{\boldsymbol{x}}_1(0), \dot{\boldsymbol{x}}_2(0)\rangle = 0 \tag{2.38}$$

ならば 2 つの曲線は直交すると言う（図 2.5）．

2.3.1 アファイン接続と測地線

ダイバージェンスが定義された空間は，リーマン空間になることを見た．リーマン空間では，1 点の近傍は接空間で表され，これが 1 点の周りの線形近似になる．しかし，接空間は場所ごとに違う（図 2.2）．全体を見渡すには，これらの接空間がどう変化していくかを眺めなければならない．これを行うのが，アファイン接続である．リーマン空間には自然なアファイン接続があり，これをもとに "真っすぐな線" として測地線が定義できる．これは 2 点間を結ぶ最短

---

*6)　ここでは，曲線の接線を自明に定義できるものと考え，その全体がなすベクトル空間を接空間と呼んでいる．特に，座標系 $\boldsymbol{x}$ の各座標軸 x_i に沿った接ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ を基底として用いるものを，座標系 $\boldsymbol{x}$ に伴う自然基底と呼んだ．しかし，接ベクトルをきちんと定義するには，道具がいる．数学では，接ベクトルを方向微分演算子と同一視して定義する．すなわち，多様体上の関数の作る環を考え，関数から実数への線形演算子でライプニッツ則を満たすもの（これが方向微分演算子である）を接ベクトル，その全体を接空間と定義する．

の経路である*7).

ダイバージェンスの空間では，もう少し一般的なことができる．ダイバージェンスから，リーマン接続とは異なる 2 種類のアファイン接続が導かれる．したがって，2 種類の測地線が定義できる（経路に沿った距離は最短ではないが，"真っすぐな" 線である.）これらが双対構造を持ち，リーマン測地線はその平均になる．言い方を変えれば，双対接続の空間は，リーマン的な構造を 2 つに裂いて，双対にしたものである*8).

この話題は，ここでは述べない．以下，しばらくは双対平坦なリーマン空間（リーマン空間としては曲がっている）を調べるので，アファイン接続だの共変微分だのといった，微分幾何の枠組みはしばらく使わないでやっていこう．

終わりの一言

ダイバージェンスは空間の構造を定める．ユークリッド空間の構造は，距離の 2 乗 $(1/2)\sum x_i^2$ をダイバージェンスと定めると自動的に導ける．一般のダイバージェンスからは 2 つの構造が導かれる．一つはリーマン構造で，これは局所的な距離を定める．もう一つは双対接続の構造で，新しい幾何構造を導く．その特別の場合が双対平坦の空間である．これを次回に述べる．

参考文献

1) L. Bregman, The relaxation of finding a common point of convex sets and its applications to the solution of problems in convex programming, *Comp. Math. Phys* (USSR), **7**, 200–217, 1967.
2) K. Nomizu and T. Sasaki, *Affine differential Geometry*, Oxford University Press, 1994.
3) S. Amari and H. Nagaoka, *Methods of Information Geoemtry*, American Mathematical Society and Oxford University Press, 2000.

（あまり・しゅんいち，理化学研究所脳科学総合研究センター）

*7) アファイン接続は，2 つの（微小に離れた）点における接空間のアファイン対応（アファイン写像）として定義される．これにより共変微分という不変な微分が定義できる．測地線は方向を変えない線という意味で，曲線の接線の曲線に沿った共変微分が 0 になるものである．計量が定義されているリーマン空間にあっては，計量を保存するようなアファイン接続が自然に定義できる．これをレビ・チビタ接続，またはリーマン接続という．リーマン接続による測地線は，2 点間を結ぶ最短経路の線になっている．しかし他の接続を用いればこの性質は成立しない．

*8) 双対接続とは，リーマン接続を 2 つに裂いて双対にしたものである．これは情報幾何から出てきた新しい幾何学的な概念と言える．もちろん自己双対の場合を含み，これはリーマン接続になる．このような接続は従来の数学では，アファイン微分幾何でその特殊な場合が出てくる2)．情報幾何については文献 3) を見よ．

リレー連載

現象から方程式を創り出す

第10回 —立式で鍛える論理的思考法—

ナヴィエ–ストークス方程式の導き方

岡本 久

1. はじめに

ナヴィエ–ストークス方程式の力学的な背景については語り尽くされた感がある．今井功[1]や佐野理[5]などの教科書は言うに及ばず，本誌でも木村芳文氏による極めて優れた解説[4]が出たばかりである．そこで本稿では通常省略されている歴史的な発展も踏まえて初等的なところから始めてみたい．

2. 流体とは

常温常圧において物質は気体，液体，固体の3種類のどれかの形態をとる．このとき，流体とは気体と液体の総称である．固体には決まった形があるが，流体には形がない．流体はそれを入れる器の形に従うのである．こうした流体の運動を記述するにはどういう方法をとればよいか，考えてみよう．

まず，一見極めて正当に思えるが実は役に立たない考え方を紹介しよう．すべての物質は分子からなっているから，それら分子の運動をすべて記述できればよい．考えている容器内の流体の分子を質点と見なし，その数を N とし，j 番目の分子の座標を $x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, x_3^{(j)}$ $(j=1,2,\cdots,N)$ とする．さらに分子間の相互作用も既知であるとしよう．座標の名前を付け替えて ξ_k $(k=1,2,\cdots,M)$ とする（ただし $M=3N$）．つまり，ξ_k は $x_1^{(i)}, x_2^{(j)}, x_3^{(l)}$ のうちのどれかを表す．こうすると，

$$\frac{\mathrm{d}\xi_j}{\mathrm{d}t} = f_j(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_M) \quad (j=1,2,\cdots,M)$$

を得る．相互作用を表す関数 f_j は既知の関数であると仮定する．あとはこの微分方程式を解けばよい．必要ならばスーパーコンピューターを使って数値的に解けばよい．

こうした記述をしたくなるのは当然であるが，ミクロの現象を見るとき以外，全く役に立たない．$N=M/3$ がアボガドロ数（約 6×10^{23}）のとき，どれくらいのハードディスクが必要になるか考えてみればよい．東京ドーム何杯もの量になることがわかるであろう．たとえハードディスクの改良が進んでも，計算時間の問題はもっと深刻である．一般に，計算量は M に比例するのではなく，M^2 あるいは M^3 に比例する．M が100や1,000くらいならば何とかなるであろうが，アボガドロ数程度になれば計算時間は実質上無限大になってしまう．最後に，記録媒体の問題も解決し，計算時間の問題も解決されたとしても（そんなことが起きるとは思えないが），もっと本質的な問題が残っている：こうした天文学的な量の数値を見て，流体の性質がわかったと言えるものなのかどうか，

という問題である．例えばエアコンの吹き出し口と床のあたりの温度差を知りたいと思ったときどうすればよいか考えてみよう．上の方法だと，床近くにある分子の速度（温度は分子の運動エネルギーに比例することを思い出そう）を計算せねばならない．しかし，初期時刻における分子の位置がわかっていたとしてもある程度時間がたったときにその分子がエアコン近くにあるか床近くにあるかはほぼ予測不能である（カオスという現象はこれに対応している）．床の温度を調べるには床近くの分子をすべてとりあげてその速度の平均をとらねばならないから，天文学的な数の分子を 1 個 1 個調べて床近くかどうかいちいちふるいにかけねばならない．このようなことを実行するのは不可能ではないにせよ実に無駄なことをすることになろう．

幸いにしてマクロな現象は温度とか圧力などの平均量を知ることを目的とすることがほとんどである．このような場合に個々の分子の軌道を知る必要はない．そのような場合に必須となるのが**連続体**という概念である．これはある意味で近似である．しかし，極めて優れた近似なので，連続体という概念を第一原理にしても何ら情報落ちがないと思えるくらい優れたものである．

[連続体の定義]．さて，連続体とは何か？ その特徴は，『分割しても体積と重量以外の物理的な性質は変わらない』というところにある．水を 2 つの容器に分けてもどちらも水の性質は同じである．分けられた水をさらに小さな容器に 4 分しても変わらない．このような性質があるのは水の分子の数があまりに大きいために実質上は無限大と見なすことができるからである．そのために水が連続的に（隙間なしに）詰まっているものと見ることができるのである．もちろんこの分割操作をいつまでも続ければいつかは分子程度の大きさになるから分割は無限に繰り返せるものではない．この意味で連続体とは近似的な概念であり，適用限界があることを忘れてはならない．そのような適用限界を忘れない限り，連続体という見方は極めて有用なものである．

[流体の粒子とは？]．さて，連続体と見なしたとき水の運動がどう記述されるかを考えてみよう．水は空間のある領域に連続的に分布している．したがって空間の各々における流体粒子で水の速度が定義できる．ここで粒子と言うときには，水の分子を指しているわけではない．マクロな尺度ではあまりに小さいので幾何学的な点と見なしているけれども，実際にはある程度の大きさを持っている領域であり，その中には十分に数多くの分子が詰まっていてその小領域での物理量（例えば速度）の平均が定義できて，その点の関数と見なすことができ，しかもその点の連続関数であると仮定できるものとする（以上の説明は完全に数学的なものではないが，できるだけ直感的に理解してほしい）．このような状況では，空間の各点 x で速度が定義できる．速度は時刻 t にもよるから速度 $\boldsymbol{v}$ は (t, x) の関数である：$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t, x)$．ここには 2 つの無限がある．人間の目から見て流体粒子は無限小であるが，各々の流体粒子の中には無限と見えるほどたくさんの粒子が存在している．図 1 は，ある点（幾何学的な点）を中心としてある半径の球内で平均値をとったときのイメージである．半径が小さくなって分子の平均移動距離と同程度のオーダーになったら平均ははげしく揺れ動くであろう．しかし，十分大きければ平均値は確定す

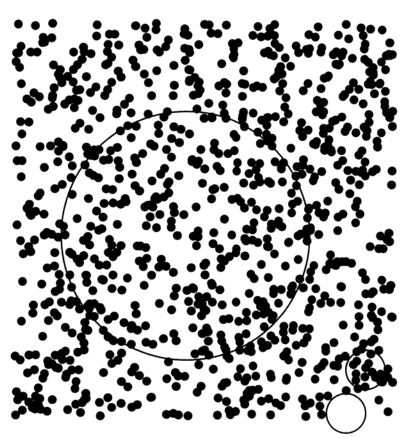


図 1　平均値の存在にはある程度の大きさが必要．小さすぎる円内で平均をとっても無意味．一番右下の円には入っている分子がない．

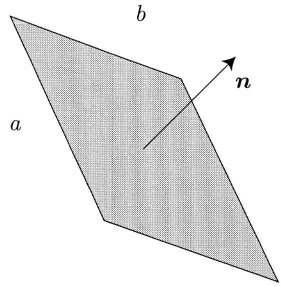


図2　圧力のイメージ．

るはずである．

次に圧力というものを定義しよう．流体の中の任意の点 $x=(x_1,x_2,x_3)$ をとり，その点を通る仮想的な微小平面を思い描こう．そしてその平面の片方と他方がどう相互作用するかを考えよう．微小平面の片側を a とし，他方を b と名付けよう．点 x で a から b に向かって単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ をとる（図2）．このとき，オイラーは，

> **完全流体の仮説 1**　a が b を押す力は $p\boldsymbol{n}$ であり，b が a を押す力は $-p\boldsymbol{n}$ である．p は (t,x) の関数であるが，平面の選び方，特に $\boldsymbol{n}$ には依存しない．

という仮説に基づいて話を進めた．この仮説は常に成り立つわけではないが，少なくとも静止状態の流体では成立しているし，摩擦が無視できる場合にも成立しているものと考えられている．このとき p を圧力と呼ぶ．標語的に言えば，圧力とは流体内部でお互いに押し合っている力のことである．こうした圧力という概念はオイラーによって定式化されたもので，これこそが連続体力学の中心概念である．

注意 1　流体内部の摩擦が無視できない場合には上の仮説はそのままでは採用できない．地面の上に置かれた物体を引きずる場合，地面が物体に及ぼす力は垂直抗力と摩擦力を合わせたものになる．したがってその力は面に垂直ではない．しかし，物体が静止しているときには垂直抗力だけが働いているので及ぼす力は面に垂直である．

3. 完全流体の数学的記述方法

本節では完全流体の仮説を満たす流体を数学的に記述する方法を述べる．具体的なイメージとしては摩擦が無視できるときの水の運動を頭に思い浮かべていただきたい．これを記述する方程式はオイラー方程式と呼ばれている．

まず初めに『摩擦が無視できる』という仮定は粘性抵抗が無視できるということと同じ意味に用いていると理解されたい．水泳をすれば誰もが気づくように水中の運動では抵抗を受ける．この抵抗の原因が人間と水の間に働く摩擦である．空気中では抵抗を感じる機会はずっと少ないが，大多数の流れ星が空気との摩擦で生じる熱のために燃え尽きることを思えば摩擦が存在するという事実は疑いようはない．しかし，ある種の現象では摩擦の果たす役割は非常に小さく，無視しても実害はない．例えば海に発生する波の運動などでは摩擦は無視できることが多い．

次に，水の圧縮性は極めて小さいことに注意する．ほんの数パーセント体積を減らそうとすると何千気圧もの超高圧が必要になるくらい，水は体積を変えにくい．日常的な現象では，水の体積変化はゼロであるとして差し支えない．このとき流体の密度は時刻 t にも空間の位置 x にも依存しない定数になる．ただし，温度には依存する[*1)]．ここでは密度が一定と見なすことができる場合に限定しよう．そうしてもまだまだ困難な問題はたくさん存在している．空気を含む大多数の気体は圧縮性が顕著な場合があり，そういったときには運動方程式にも圧縮性を取り込まねばならない．

以上の前書きの下で，非粘性流体の運動方程式を導こう．3次元空間内の領域 Ω の中に流体が詰められているものとする．この流体には，密度 ρ，圧力 $p=p(t,x)$，速度 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(t,x)$ が定義され，完全流体の仮説が適用できるものとする．この

*1)　水の比熱は非常に大きいので，運動の結果生ずる熱による温度上昇は微々たるものである．したがって密度の温度依存性は通常問題にならない．しかし，強く熱せられて対流が起きるような場合には密度の温度依存性を考慮した方程式系（例えばブシネスク方程式など）を採用しなくてはならない．

とき，Ω の各点 $x=(x_1,x_2,x_3)$ および各時刻で $\boldsymbol{v}(t,x)=(v_1(t,x),v_2(t,x),v_3(t,x))$, $p(t,x)$ が定まれば，流体の運動がわかったことになる．これらは，次の偏微分方程式を満たす．

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3}v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+f_i \quad (i=1,2,3), \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}=0. \tag{2}$$

ここで，f_i は流体に直接作用する力（外力と呼ばれる），例えば重力のようなものの成分を表す．これらの偏微分方程式の組をオイラー方程式と呼ぶ．とくに，(1) を運動方程式，(2) を連続の方程式と呼ぶ．

我々はまず，質量保存則を仮定して連続の方程式 (2) を導くことにする．空間内に固定された任意の領域 V を考えると，ここに含まれる質量は $M=\int_V \rho\,\mathrm{d}x$ で与えられる．質量保存則によって空間のいかなる部分でも，質量が生成されたり消滅したりはしない．したがって，M の時間変化は，単位時間内に境界 ∂V を出入りする質量の総和に等しい．これを式で書き表せば，

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}=-\int_{\partial V}\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}x.$$

ガウスの定理によって右辺は

$$-\int_V \mathrm{div}\,(\rho\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}x$$

に等しい．ここで $\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}=\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}$ である．ゆえに，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho\,\mathrm{d}x=-\int_V \mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}x.$$

ρ は定数であるから左辺はゼロであり，$\int_V \mathrm{div}\,\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}x=0$ を得る．領域 V は任意だから (2) が出てくる．

以上の導出法は現在ではどの教科書にも採用されている方法であるが，オイラーの元々の方法[6)]はこうではなかった[*2)]．彼は空間内に，(x,y,z) と

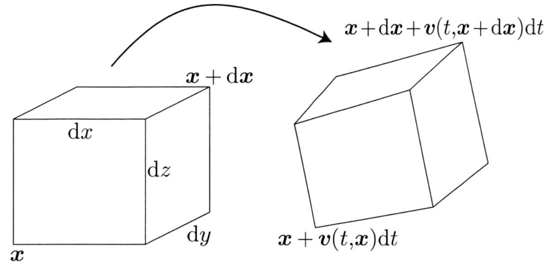


図 3　微小な直方体の変形．

$(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y, z+\mathrm{d}z)$ を対角線とする直方体を考える．そして，$\mathrm{d}t$ 時間後に流れによってこれがどういう領域に移動するかを考える．$\boldsymbol{x}=(x,y,z)$ は $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}(t,x)\mathrm{d}t$ に移動する．（ここで，$\mathrm{d}t$ の 2 乗以上の項は無視している．）

$\boldsymbol{x}+\mathrm{d}\boldsymbol{x}=(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y, z+\mathrm{d}z)$ は $\boldsymbol{x}+\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{x}+\mathrm{d}\boldsymbol{x})\mathrm{d}t$ に移動する．高次の無限小を無視すれば

$$\boldsymbol{x}+\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}t+\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial y}\mathrm{d}y\mathrm{d}t+\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial z}\mathrm{d}z\mathrm{d}t$$

である．移ったあとでは，直方体は変形を受けているが（図 3），対角線ベクトルが

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial y}\mathrm{d}y\mathrm{d}t+\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial z}\mathrm{d}z\mathrm{d}t$$

の直方体であると近似できる．その x 方向の長さは

$$\ell_x\equiv\left(1+\frac{\partial v_1}{\partial x}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x+\frac{\partial v_1}{\partial y}\mathrm{d}t\mathrm{d}y+\frac{\partial v_1}{\partial z}\mathrm{d}t\mathrm{d}z$$

となる．y 方向の長さ ℓ_y，z 方向の長さ ℓ_z も同様に計算できる．したがって，この直方体に似た領域の体積は，$\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ の 2 次以上の高次を無視すれば $\ell_x\ell_y\ell_z$ であり，これを展開して $(\mathrm{d}t)^2$ を無視すれば

$$(1+\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

となる．これが元の体積 $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ に等しいわけだから，

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$$

となる．これがすべての $\mathrm{d}t$ と $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ について成り立つのであるから $\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}=0$ を得る．

*2)　これは当り前である．ガウスの定理などの積分公式が見つかったのは 1830 年代である．

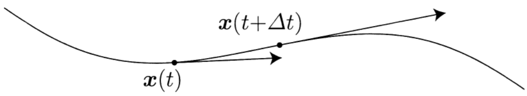


図 4　粒子の軌道.

運動方程式 (1) を導くには次のようにする．これはオイラーの元々のやり方と同じものである．我々はまず，流体とともに流れる点 $\boldsymbol{x}$ における加速度を計算する．時刻 t で $\boldsymbol{x}$ にいる粒子は，時刻 $t+\Delta t$ において $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}(t,x)\,\Delta t$ にいるとしてよい（図 4 を参照）．したがって，粒子の加速度は，

$$
\begin{aligned}
&\text{加速度の } i \text{ 成分}\\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{v_i(t+\Delta t, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}t)-v_i(t,\boldsymbol{x})}{\Delta t}\\
&= \frac{\partial v_i}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3} v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}.
\end{aligned}
$$

次に流体粒子に加わる力を計算する．重力のような外力は既知のベクトル場が与えられているとしてよい．これを $(\rho f_1, \rho f_2, \rho f_3)$ とする．外力そのものではなく単位密度当たりに働く力 $\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,f_3)$ を使うのは単なる習慣である．一方，これに加えて，圧力がかかる．

図 5 をごらんいただきたい．これからこの微小直方体にかかる力の x 成分は

$$
\begin{aligned}
&p(t,x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-p(t,x+\mathrm{d}x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
&= -\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z
\end{aligned}
$$

であることがわかる（ここで，圧力が平面に垂直に働いていることを仮定している）．結局，働く力は

$$\rho \boldsymbol{f}-\nabla p$$

となることがわかった．圧力がこのようなものだということを認識してしまえば簡単なことである．しかし，1757 年にオイラーが気づくまで，こうした理解ができていなかったのである．

流体力学の教科書には，ダニエル・ベルヌーイの “Hydrodynamica”（1738 年）から理論的な流体力学が始まると書いてあることがある．しかし，これは必ずしも正確とは言えない．圧力を使って運動が微分方程式で表される，と気づいたのはオイラーであり，オイラーから数理流体力学は始まったと言える．

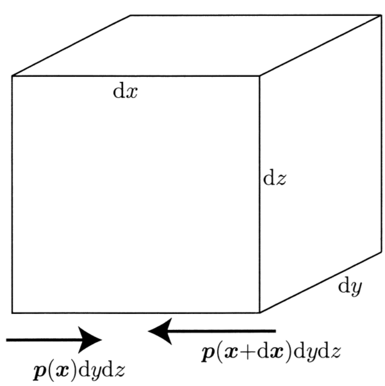


図 5　微小な直方体にかかる圧力.

4. ナヴィエ–ストークス方程式の導き方

ここからは粘性を無視しないことにする．連続の方程式 (2) の導き方は粘性のあるなしにかかわらず正しい．しかし，このとき運動方程式 (1) は以下のような修正を受ける．

理論に入る前にこの方程式がなぜナヴィエ–ストークスというように二人の名前が併記された形になっているのか，その理由を説明しておこう．簡単に言えば，方程式を初めて導いたのがナヴィエであったが (1823 年)，その導き方は分子論的であり，なぜ正しい方程式が出てきたのか不思議なくらいおかしな議論であった．これに対し，ストークスは導いた時期こそナヴィエに遅れた (1845 年) けれども，その導き方は連続体に基づくもので，基本的に現代でも通用するものであった．早さでナヴィエ，正しさでストークスというわけである．

運動を記述するために，コーシーの応力原理を採用する．この原理は流体を含む非常に広い範囲の連続体について正しいとしてよいことがわかっており，次のように述べることができる：

「流体中の任意の曲面 S には応力場と呼ばれるベクトル場 $\boldsymbol{p}$ が存在して，それはその点において面 S の外側の物体が内側の物体に及ぼす力に等しい．

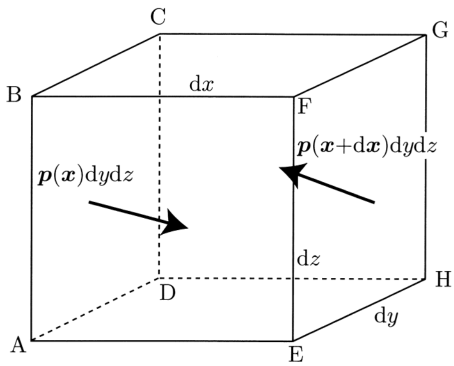


図 6　微小な直方体にかかる応力．

このベクトル場はその点の位置とその点における曲面 S の法線ベクトルのみによって一意に決まるものと仮定する．つまり，$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{n})$.」

完全流体のときには $\boldsymbol{p}$ は常に法線ベクトルと平行であり，$\boldsymbol{p} = -p(t, \boldsymbol{x})\boldsymbol{n}$ と書くことができたが，摩擦があるときにはこれは成り立たないので，$\boldsymbol{p}$ は接線成分も持つ．これが前節と本節の仮定の違いである（図 6 を参照)．あとはオイラー方程式の場合と同じようにやればよい．点 $\boldsymbol{x}$ において x 軸に垂直な平面を考え，その平面の左側が右側を押す力を $\boldsymbol{p}_x$ とする．同様に $\boldsymbol{p}_y$ と $\boldsymbol{p}_z$ も定義する．このとき，流体粒子にかかる力が

$$\rho \boldsymbol{f} + \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{p}_x + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{p}_y + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{p}_z$$

となることを見るのは困難なことではない．これから，

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\right) = \rho \boldsymbol{f} + \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{p}_x + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{p}_y + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{p}_z \tag{3}$$

を得る．

完全流体では応力の接線成分が存在しない．これは粘性（流体の摩擦）を無視したことになっている．粘性を考慮して，応力 $\boldsymbol{p}_x, \boldsymbol{p}_y, \boldsymbol{p}_z$ を圧力 p と速度 $\boldsymbol{v}$ で表せば一件落着である．これをストークスは理論的に導いた．1845 年のことである．

4.1 構成方程式

x, y, z の代わりに x_1, x_2, x_3 とし，$\boldsymbol{p}_x, \boldsymbol{p}_y, \boldsymbol{p}_z$ を成分で表して，

$$\boldsymbol{P} \equiv (\boldsymbol{p}_x, \boldsymbol{p}_y, \boldsymbol{p}_z) = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$$

と書くことにする．**これを流れの他の量を使って記述する法則を構成方程式と呼ぶ**．これは流体の種類を限定することと同値である．例えば，完全流体であるということは，構成方程式 $\boldsymbol{P} = -p\boldsymbol{I}$ を採用することと同値である（$\boldsymbol{I}$ は単位行列)．

ストークスは次のように考えを進める．では一体全体，$\boldsymbol{P}$ は何の関数となるのであろうか？ 圧力・温度・速度すべてに依存するであろうが，$\boldsymbol{v}$ そのものではなくその空間変位にしか依存しないと見るのは自然である．何となれば空間について一様に同じ速度で動いていれば内部に摩擦は起きないからである．摩擦が起きるのは運動方向に垂直な方向で計ってみて速度の変位が起きる場合である．したがって，$\boldsymbol{P}$ は $\boldsymbol{v}$ ではなく

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

の関数となるであろう．ストークスは次に，

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\boldsymbol{D} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}$$

と分解する．ここで，

$$\boldsymbol{D} = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)_{1\le i,j\le 3},$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)_{1\le i,j\le 3}.$$

こうした対称部分と歪対称部分への分解は何も難しいことではないが，ストークスが初めて使い始めたもののようである．$\boldsymbol{P}$ は $\boldsymbol{\Omega}$ には依存しないであろう．なんとなれば，$\boldsymbol{\Omega}$ は剛体回転を表しており，剛体回転しているときには内部のきしみはないからである．

4.2 ストークスの原理

ストークスは流体という概念を，応力場が定義されている一様等方的な連続体と規定している．これを現代的な形で述べるならば，次の 4 個の公

理に集約することができる．

(A.1)　$\boldsymbol{P}$ は $\boldsymbol{D}$ と p の連続な関数で，他の力学的量には依存しない．例えば $\boldsymbol{v}$ そのものや $\boldsymbol{v}$ の高階導関数などには依存しない；

(A.2)　$\boldsymbol{P}$ の $\boldsymbol{D}$ 依存性は空間の点 $\boldsymbol{x}$ に依存しない（流体の一様性）；

(A.3)　等方的である．すなわちどの方向もすべて等価である（流体の等方性）；

(A.4)　$\boldsymbol{D} = 0$ のときには $\boldsymbol{P} = -p\boldsymbol{I}$ となる．ここで，$\boldsymbol{I}$ は単位行列である．

この 4 個の公理を満たす連続体を粘性流体と呼んだのである．水や空気はストークスの公理系をよく満たしている．一方，ポリマーや液晶などは等方的ではないから (A.3) を満たさない．こうした物質は液体としての性質を持っているが，その運動を正確に記述するにはナヴィエ–ストークス方程式よりもはるかに複雑な方程式を用いなくてはならない．

定理 1　公理 (A.1)–(A.4) に加えて，「$\boldsymbol{P}$ は $\boldsymbol{D}$ の線形関数である」を仮定し，非圧縮性を仮定すると，

$$\boldsymbol{P} = -p\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{D} \tag{4}$$

となる．ここで，μ は定数である．

ページ数の都合で証明は省略する．文献 2) を参照していただきたい．

さて，(4) を (3) に代入し，非圧縮条件に注意すると

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\right) = \rho\boldsymbol{f} - \nabla p + \mu\triangle\boldsymbol{v}.$$

すなわち，ナヴィエ–ストークス方程式を得る．$\nu = \mu/\rho$ が動粘性係数である．あとは境界条件と初期条件をもとに，この方程式を解けばよい．

しかし，これを解くことは数学的な意味でも数値計算的な意味でも大問題である．文献 1, 3, 7) をご覧いただければわかるように，やらねばならないことは山積みされている．ページ数の都合でこれについて触れることができないのはまことに残念であるが，今後機会があれば方程式の応用について語ってみたい．

参考文献

1) 今井　功,『流体力学』, 岩波書店（1970 年）.
2) 岡本　久・中村　周,『関数解析』, 岩波書店（2005 年）.
3) 岡本　久,『ナヴィエ・ストークス方程式の数理』, 東京大学出版会（2009 年）.
4) 木村芳文, ナヴィエ・ストークス方程式と流体の運動,「数理科学」, 2009 年 6 月号, 35–38.
5) 佐野　理,『連続体の力学』, 裳華房（2000 年）.
6) L. Euler, Pricipes généraux du mouvement des fluides, *Opera Omnia*, **Ser. II, 12**, 54–91. 1755 年に提出, 印刷公表は 1757 年. 英語訳が, *Physica D* **237**, (2008), 1825–1839.
7)『数学七つの未解決問題』, 森北出版（2002 年）.

（おかもと・ひさし，京都大学数理解析研究所）



自己言及的伏線遍歴

金子　邦彦

1. 大学院まで

人工知能，認知科学の元祖，限定合理性で経済学の大きな潮流を作り，という20世紀の巨人の一人，Herbert Simonは自身の伝記を学者人生のモデルだとして著している[1)]．とてもそのような業績も，臆面のなさも持たない者にとって，果たして一体何を書くべきかは問題だ．道しるべどころか，せっかくこれまでの皆さんの書かれた道案内を壊してしまいかねない．普遍的なことを書くべきなのだろうか？ そうすると，まあ，理論物理に進む人並みには，数学や物理が好きだった高校時代を過ごし，すぐれた友人に刺激を受け…，と書いていくことになる．とはいえ，そのような標準的なことは期待されていないようにも思う．すると，気体分子運動論的描像による歴史観は可能か，でも革命のときはミクロ（個人）がマクロにまで影響するのではないかとか考えて歴史に進もうか物理に進もうか悩んだとか，またルシャトリエ原理を聞いて変化に抵抗するような応答が起こるというのは安定したシステム一般の基本的真理に違いないと妙に興奮したとか，荘子に著されるような，文字で伝えられない真理を文字で伝えるということはどういうことなのか日々考えたり，と多感な（？）青春時代を過ごし…，と書けば少しは期待に添えるのかもしれない．とはいえ，荘子好きは湯川秀樹由来の日本理論物理学の伝統（？）として，さして目新しいことではないかもしれない（なお，負の（？）側面を挙げれば，ラジオを自分で作るような実験好きの少年でもなく，天文少年でも昆虫少年でもなく，果たして，理系向きなのか？ という疑問を振り払えずにいたことだろう）．

かくて大学に至る．第2量子化から入って第1量子化が導かれてくるという，伊豆山健夫先生の量子力学の講義に感銘を受けた教養課程，熱力学への関心，久保亮五先生の統計力学の講義，といった，物理学生の通常の経緯を挙げてもよいのかもしれない．実際，まじめに物理を修得したけれども，できあがった大伽藍に少し装飾をほどこすよりも，どこか標準からはずれたところに新しい建物の土台を作りたいという気持ちはぬぐえずにいた．背後には，標準的理系ではないのでは，という異邦人的感覚があったのかもしれない．

高校時代，生物学は嫌いで，実際，今でもたくさん遺伝子や分子の名前が出てくるとうんざりとしてしまうのだけれど，なぜか，生命とは何か，これを物理にできないのかな，とおぼろげに思っていた．もちろん，Schrödingerの『生命とは何か』[2)]から始まり，Szilard流のMaxwell's demonと生命の関係を考えたりしていた．昔の岩波の基礎物理講

座には『生命の物理』[3]という巻があって，Szilard の話も，von Neumann の自己増殖オートマトンの話も載っていて，生命の中に新しい物理を探せたらなあ，という若者には刺激的であった．そして，もう一つの流れとしては，教養課程の杉本大一郎先生の宇宙科学の講義で初めて聴いた，Prigogine の散逸構造の話がある[4]．非平衡と生命現象の関連を漠然と考えながら，宇宙には平衡に落ちるのをできるだけ遅らせようという傾向があって，その普遍的表れが生命なのではないか，といった妄想を抱いたりしていた．背後には，小松左京の SF に現れる，「この地球上でのたまたまの進化に縛られない，宇宙一般に成り立ちうる普遍生物学構想」[5] に心躍らされていたことがあったのだろう．

こうして生命現象の物理を始めました，となればストレートなのだけれども，生物物理の講義の冒頭で，世界的にも著名な教授から，生物物理には理論はなくて実験だけです，という，明言がされる．先に述べたように，そして大学の授業でさらに確認したように，実験が全くもってできないわけで，暗澹たる気分になったことを覚えている．とはいえ，しばしば悲観主義者的言動をとりつつも[*1]，基本はどこかで楽観的なのだろうか（だいたい人は悲観主義と楽観主義がマトリョーシカのように入れ子になっているものなのだろう），いつか生命を理論物理として理解できる日が来る，という風に無根拠に思っていた節もある．

ちょうど 4 年生の久保，鈴木研での演習で，出版されたばかりの Haken の Synergetics[6] を読むことになる．一方では，Prigogine グループの活動[4]もあって，平衡から遠く外れた非平衡現象の物理の先に，生命を理解する道があるのでは，という楽観が許される時代でもあった．というわけで，その方向へ魅かれつつも，果たして本当はその道があるのか，どこから入ればよいのかはよくわからないまま，大学院に至る（1979, 4 月）．——こう書いてみると，大学院進学まで，いかにも必然的道筋を歩んでいたかのように見えるけれど，それは後から見ればそうみなすことができるだけなので当然各所で人並みに悩み，云々．それは省略．

2. 大学院時代

指導教官の鈴木増雄先生から読んでみたら，と最初にもらった論文は，（誘電体理論で著名な）Fröhlich のもので，細胞膜の電気双極子が非平衡状態で Bose–Einstein 凝縮と同様な仕組みでコヒーレントな振動を示し，それが生命の機能と関連している，という，極めて独創的で，標準から外れたものだった[7]．たぶん，普通の学生にこういう論文を渡すことはないだろうから，こちらの指向性をよく考えてくれてのことだろうと思う．実際，この一連の研究はすごく面白かったし興奮した．ただ，この先を考えると，まず実験するしかないのでは，となり，残念ながら，その方向の研究はできなかった．しかし，最初にこの論文との出会いをいただいたことは，自由に発想し異分野へ越境していく姿勢の上でも大きな原動力となった．後年，細胞分化を研究する際に，振動の原因は違うにせよ，その同調性の変化を重視した深層心理には，この論文の記憶があったのかもしれない．

結局，修士の時期には，非平衡現象でのゆらぎやそれが絡む秩序形成に関して，確率過程を用いて調べていた．自身が一人で書いた最初の論文は，確率過程において速い変数を消去して，遅い変数だけの Langevin 方程式に持っていくというもの．もともとは先述の Haken が得意とする，速い変数の断熱消去，つまり $dx/dt = f(x, y) = 0$ を解いて速い変数 x を y の関数として書いて，それを $dy/dt = g(x, y)$ に代入して遅い変数 y だけの式を得るという手法があり，それに対して，揺らぎを含

*1) 悲観主義といえば，大学の卒業文集（1979）に書いた文章は，2025 年，人類が破滅的危機に陥っているという前提で，生物物理は 2000 年頃に進んだのに歴史物理学が発展するのが遅れたのが悔やまれる，と振り返るといった内容．2025 年というのは人口が指数関数的に増えていけばそのあたりでまずくなるだろうというローマクラブの予想に拠った．いくらなんでも指数関数で増え続けるってほど，人類は愚かでないだろうという期待をよそにいままでのところ指数関数で増えている．なお，湾岸戦争だとか，中国ですら実質上資本主義経済になるとかも書いてあった（ソ連邦の崩壊は一部で既に予想されていた）．何はともあれ $dx/dt = ax$ $(a > 0)$ の数理の意味することをもう少し多くの人が共有してもらえたらよいのにと思う．

んだ Langevin 方程式の場合はどうしたらよいのかという問題．たまたま読んでいた Stratonovich の確率過程の本に出ていた手法をまねして，固有関数展開をすれば導ける，というもので，決して独創性の高いものとはいえないけれども，一応，後に Risken の教科書[8] に取り上げられるようになる程度の評価は受けて，多少の自信にはつながった．

この他，確率過程の側面からの非平衡現象をいろいろ調べた．様々な非線形 Langevin 方程式を解いて緩和過程を調べる，冨田–冨田の不可逆循環[9]がリミットサイクル生成途中で増幅される，蔵本–都筑の複素 Ginzburg–Landau 方程式[10]におけるゆらぎの影響や，その系の秩序化過程を鈴木のスケーリング解析[11]を拡張して調べる等，とにかく片端から試みて修士論文を書く．

かくて博士過程にあがる．ここで自身の中で曲がり角を迎える．どうも，この揺らぎ—非平衡路線でやれることは限られている，なかなか「生き生きした」物理を作る道になっていない，という悩みに至る（しかし後から見ると，ノイズにより振動が誘起されるといった確率共鳴のようなことも導いているし，速い変数の消去による揺らぎの伝搬とかは今や細胞生物学でも登場するのだから，その判断は正しかったかどうかはわからない．今や細胞の中での揺らぎを調べる研究が大きな潮流になり，揺らぎが生命らしさの源だといったフレーズを聞くと，多少複雑な気持ちがする．ただし，当時は細胞内でのタンパク量の揺らぎ，といったような測定は全く不可能だったので，理論だけで独走する研究があり得たかはわからない）．

で，カオスに興味を持ち始め，まもなくそれにのめりこむようになる（これについては，拙著，『カオスの紡ぐ夢の中で』[12]を参照されたい）．カオスはダイナミックな「生き生きした」振舞いをする現象であり，それが楽しかった．とはいえ皆と同じ方向を向くのもどうかという，生来の天の邪鬼のために，少数自由度でのカオス系という潮流に掉さして，自然は大自由度の現象だろうから，と，大自由度のカオス現象の研究を始める．しかし，あまりに多くの自由度を扱うのは難しく，「大」といっても，カオス的不安定性を持つ自由度が 2 つの場合の研究に落ち着く．パソコンの中に，とんぼの目玉のようなアトラクターが形成されていくのを見つけた日のときめきは今でもまざまざと思い出せる（計算機が遅かったから，時々刻々，軌道の動きを実体験できたのがよかったのかもしれない）．準周期運動からいかにカオスが生じるかの様々なパタンを見出して博士論文を著す[13]．調べれば新しいことが見出せる楽しい時期ではあったが，その一方で，準周期からカオスへのルートの研究は，当時欧米でも盛んになっていて，先にこちらが発見しても，向こうの強力なグループに攫われることもあり*2)，なかなか一人で太刀打ちできず，もっと余人が手を出しそうにないことをやらねば，とも思う．

3. ポスドク以降

かくてポスドクになる．幸い，学術振興会の特別研究員に採用されたものの，その頃の学振研究員というのは，任期 1 年，月収 10 万円，研究費年 10 万円という，なかなか寂しい，というかあくまで腰掛けの身分であった*3)．当時はこの他に日本ではポスドクの制度はないし，カオスのような新しいことを研究していてはまず助手ポストもないだろう，というわけで，特に行きたかったのでもないけれども外国でのポスドクを探す*4)．

---

*2) トーラスのロッキングやカオスへのルートに関しては，Kadanoff や Siggia ら強力なグループが研究していた．僕の方は周期が足し算で増える系列を調べ，それほどかぶらずにすんだ．トーラスが倍加してカオスへ至る道については，フランスのグループとかち合ったが，倍加が途中で止まることを示したので，やや注目された．3 次元以上のトーラスの存在と，そのロッキングやカオス化については投稿論文査読に時間がかかっているうちに Maryland の Grebogi–Ott–Yorke（GOY）グループの論文が流布した．トーラスのフラクタル化に関しては，同時に出た，GOY の Strange Nonchaotic Attractor（SNA）という魅力的な題名のほうに注目が集まった（一応，後年著された SNA の本には，同時の発見者とはされているけれども）．

*3) 研究費は半年分が 10 万円だったかもしれない．学術振興会は，確か，2–3 年後に大幅な変革を行い，ほぼ今の研究員制度に変わる．

*4) 最近，海外に行く若手が減ったといって海外派遣助成金を作ったりしているけれど，本当に若手が海外に行くことを推奨したいのであれば，(i) 日本のポスドク数を大幅に減らし，また，できるだけ外国人をとることにする (ii) そこで浮いたお金は大学のポストを増やすことにする．そうすれば，ま

結果，米国ロスアラモスの非線形研究センターのポスドクに採用された．できたばかりのセンターで，カオスの研究者ではDoyne Farmerという人が着任してまもない頃だった．彼の博士論文には，あのとき，Rob Shawがカオスのことをきかなければ自分はいまヒッピーとともにハモニカを吹いていただろう，それがここに博士論文を書くに至る，これこそ初期条件敏感性やなあ*5)，みたいなことが書いてあり，何となく惹かれるものがあった．Farmerは，当時アメリカのカオス若手のカリフォルニアの4人組の一人．思索的で何となく哲学者風というかジョン・レノンっぽい（？）Rob Shaw，常に知的カッコよさを漂わすNorman Packard，元気でやんちゃな感じの抜けないJim Crutchfield，そしてスポークスマン的役割もこなすFarmerの4人組は，カオスで世界観を変えるぞ，という意気盛んな若手たち（僕よりは少し年上）だった．博士論文にカオスが新世界を開く，みたいな序章を書いて，審査員にアジビラみたいだ，って叱られていた自分にとっては，内心，共鳴を感じる存在だった*6)．

ところで，その非線形研究センターのポスドクの採用通知とともに，同時期に応募していた，東大駒場の助手の最終候補になる，という知らせを受ける．決まったら半年でポスドクをやめないといけない．そう特にアメリカに行きたかったわけでもないし，何せ助手ポストはめったになかった時代，これを逃すわけにもいかない．そういうわけで，Farmerに辞退しようかと思う，と手紙を書く（まだeメイルなどない時代）．すると，半年でもいいからぜひ来い，とのこと．で，そこまでいってくれるなら，と行くことにする．駒場のほうは，渡米の数日前に，内定の通知を受け，結局半年間ということでのポスドクが始まる．

とはいえ，結局，Farmerと共同研究したわけでなく，院生にテーマを考えて一緒に研究したりしていた．博士の最後あたりから，初心に戻り，大自由度のカオス系（カオスの場の理論？）の研究をするべく，coupled map latticeというモデルを導入し，多くのカオス系が相互作用したら何が起こるかを調べていた[13~15]．皆が少数自由度なら，あまり人がやらない方向を，ということで，こっちに全力を注いでいた．今から思えば当たり前の方向に見えるが，幸せなことに未踏であったので掘れば新しい発見がある時代であった．

で，予定通り，半年で帰国となったけれど，やはり行ってよかったと思う．米国でも有力な著名教授が集う東海岸に行ったのではないので，そういう意味の財産はできなかったけれども，学問の自由さはニューメキシコの突き抜けた青空とともに体感できたし，そのときの知り合いはその後の研究を進めていく上で，有形無形の支えとなった．

助手になって3年半後，今度はStanislav Ulamフェローというものにしていただいて再びロスアラモスに戻ることとなる．このフェローに推薦するけれど，もし決まったら1年来られるか，という連絡を受けたときは正直びっくりした．というのは，このフェローになっていたのはもっと功なり名を遂げた人であったから．実際，そのときのフェローはJohn Hollandという，遺伝アルゴリズムの創始者という大物だったし，まさか，30歳そこそこのペーペーが選ばれることなどないだろうと思っていた．決まったときは，年齢にこだわらない，アメリカ風の人事に感動も覚え，何とか，この高評価に答える研究をせねばと発奮した*7)．

ず（僕がかつてそうだったように）ポスドクで海外に行かざるを得なくなる．一方で，大学のポストが増えているので，ポスドク後に，大学に採用されやすくなる．さらに教員増のおかげで，着任後にしばらく海外にいっても大学教育への支障は少なくなる．かくて，この助成金を使える人が増える．そうしないで助成金だけ作っても画に描いた餅では．

*5) 当時はまだバタフライ効果なる言葉は流布していなかった．なお，関西弁なのは，当時，カオス研究は京都が盛んで，そういう人たちとしばしば話していた影響．

*6) カオスを始める頃からいろいろ相談にのってくれ，ある意味，メンターであった津田一郎さんと飲みに行った折に，カオスが世界観をいかに変えるかの議論になり，全10巻本の計画をしたりしていた．10年後にやっと1冊書くにとどまっている[14]．

*7) 日本人では，後年，九州大学退官後の川崎恭治教授がこのフェローになられる．もちろん，当時はそのような10年も後のことを知るよしもないが，もし統計理学の泰斗が後に着かれるポストと知っていたら，ますます畏れおおく感じていただろう．なお，Ulamは非線形研究の様々なアイディアを出した数学者で，logistic mapなどの写像系でのカオ

その折，カオスを示す要素が全部と相互作用している研究をたまたま始めた．統計力学としては，平均場モデルを調べるのは自然といえば自然な流れだけれど，通常，平均場をしてもさして楽しい現象は期待できない．この場合だと，カオスは小さな差を増幅させるから元来要素の振動の位相をばらけさせ，一方で平均場結合は振動を揃えさせるほうに働くから，平均場結合を強くするにつれて非同期から同期への転移が起こるくらいかな，と思っていた．ところが，要素が異なる振動位相のクラスターに分かれるとか，階層的なクラスターができるとかが見つかり，さらには少数自由度で記述できる秩序状態ができては壊れるカオス的遍歴やら謎の集団運動やら，陸続と新現象が見出され[14]，激しく興奮する日々を過ごした．この研究で研究所の恩顧に多少は報いられたかと思う．

この研究を行ったときに，同じ規則で動く要素から異なる振舞いを示すグループができてくるのは，同一遺伝子を持った細胞が異なるタイプへと分化する現象みたいだなと思っていた．とはいえ発生生物学とはまだ大きな距離もあり，あくまで，隠喩にすぎなかった．さて日本帰国後2年ほどして，伏見譲先生に誘っていただいた研究会で，若い元気な阪大の助手と出会う．懇親会で盛り上がって話していると，彼は「大腸菌を培養していると，同じ遺伝子を持った菌なのに，元気なのとそうでないのに分化する，しかも攪拌した液体培地の実験なので菌の位置の違いによるのでもない，なぜだろう.」という．「でも，同じ発展方程式を持った簡単な要素が全部と同じ相互作用をしていても状態が分化するのを最近みつけたし，細胞だったら内部で非線形の反応ダイナミクスくらい当然あるだろうから，分化してもいいんじゃない？」これが，四方哲也さんとの出会い，そして生命とは何か[16]を探る，今日まで続く，大冒険の始まりだった．

とはいえ紙数も尽きてしまった．途中書き残してしまったことは多々あり，またお世話になった多くの人たちへの感謝を述べないままになり，申し訳ないことこの上ないが，このへんでひとまず筆を擱きたい*8)．

ス研究，セルオートマトンの発想，ソリトンの発見に至るFermi–Pasta–Ulam の研究など要所のパイオニアである．

4. 十八の君に

小説を読んでいると，ああ，前段のあれが伏線だったのかと思うことがあるけれども，ここまで振り返ってみると，若いときにいろいろ考えていたことは後の伏線だったと思えなくもない．カオスに出会ったときは当然ながら荘子の渾沌を想起したし，生命システムにおいてダイナミクスの中からいかに規則が生成されるかという僕自身の主要関心はまさに荘子の投げかけた課題だ．ルシャトリエ原理は，今でも生命システムのロバストネス，進化的安定性，適応，といった一連の研究の背後にある．大学時代考えていた平衡への落ちにくさに関してはこの数年一連の研究を行っている．そして，「安定した秩序状態が続いた後にミクロな自由度の影響がマクロレベルまで増幅されてもとの構造を壊し次の秩序への道が開かれる」というカオス的遍歴は，「革命的時代には個人の影響が増幅さ

*8) 指導教官，研究室の先輩や後輩たちへの感謝は言うまでもないが，他にも多くの方に励まされたり，刺激されたり，議論していただいた．修士の時代から博士1年までは京大基礎物理学研究所で毎年開かれていた，「非線形非平衡」の研究会があり，その後，これは「カオスとその周辺」の研究会となった．（京大数理解析研でも確率過程と非平衡開放系の研究会があった）．その頃は，北白川学舎，という，決して立派とは言えない施設に偉い先生も泊まっていて，夜，色々と話させていただいた．特に九大の森肇先生には，確率過程での速い変数の消去を研究していた修士2年の頃から議論していただいた．当時，森先生たちは射影演算子を使ってこの問題を調べていて，僕の発表の後に，この場合は自分たちのではこうなるけれど，君のではどうなりますか，とノートを持って議論に来られた．同じ一研究者という姿勢で話されたので，ほぼデビュー戦だった自分は感激した．カオス研究を始めて以降は，当時，物理では京大富田和久研と九大森肇研がその二大中心地だったので，両先生や相澤洋二さん，津田一郎さんを初めとした富田研の方々，その他，池田研介さんたちに，研究会で話を聞いていただくことが大きな楽しみだった．研究会の度に，本質的に新しい現象の発見や概念の提示が多々あって，熱気に満ちた疾風怒涛時代だった．なお，森先生には，「研究者はいつか最初の論文に戻るときが来るから，金子さんも（今はカオスをやっていても）確率過程に戻るときがきっとありますよ」と「予言」された．細胞のゆらぎを調べる上で確率過程を用いていると，予言が成就してしまったのかなあと思う一方，揺らぎと適応や進化を関連づけるというのは当時全くなかった発想なので「戻った」わけでは，と反論してみたくもある．

れそれが次の安定した時代を生んでいく」という過程として歴史を理解しようとしていた十代の自分に伝えてみたくもある（高校生の自分はそんなことではきっと満足してくれないだろうけれど）.

しかし，それはあくまでも後から見た話である．もちろん，そうやって，後から伏線に思えるようになる，というのは物理系にはない，生命（脳認知）系の特徴かもしれず，もし後年，そうした構造がいかに現れるかの理論が作れれば，そのときにこの文章を書かされたことは伏線だったのか，と振り返られるかもしれない．

さてしばしば，自分は理系向きなのか，文系的ではないのかと悩んできたことはどうなったのだろうか．今になってみると，数理的な後付けや実験もなしで，文章だけで好き勝手なことを科学っぽく表現されるのには，だんだん耐えられなくなってしまった*9)．しかし，それに伴って，（本文でもわかるように）文章も下手になってしまった*10)．まあ，研究室からすばらしい作家が出ていることをもって少しだけの慰めとしたい．

以前，物理学会誌での座談会[17]でも述べたことだけれども，研究をしながら時に自問するのは，十代終わりの頃の自分に胸をはって，こんな面白いことをやっているよ，と語れるかどうかだ．あの頃夢想していたことにどこまで近づけたのだろうか．すべて思い描いたようにはなっていないのは無論のこと，むしろそのならなかった部分の意外さに，微苦笑と，しかし，こっそりと誇りを持って語れるようでありたいと思う．

*9) もちろん哲学を軽視しているのではない．哲学は言語による思考実験を突き詰めていった到達点として高く尊敬している．ただアリストテレスや荘子が言っていたようなことを脳科学として喧伝されるとちょっと….

*10) 理系は大学にいかねば身に付かないけれど文系的な素養は何とかなるだろうとか高校のときに不遜にも思ったけれど，それが間違いだったのは，日本語の依頼原稿を書こうとしてひどく稚拙な文しか書けなくなっていて愕然としたときに十二分に認識させられた．

参考文献

1) H. Simon, *Models of my life* (1996)（訳：学者人生のモデル）.
2) シュレーディンガーの『生命とは何か』から Prigogine の散逸構造[4]，Turing パタン，そして現在の研究へと至る顛末は，「生命とは何か 1944 vs 2003」として書いた（数理科学：特集「シュレーディンガー」，**555**, 45–50）2009.
3) 大沢文夫，寺本英，斉藤信彦，西尾英之助，現代物理講座『生命の物理』（岩波書店，1972）.
4) G. Nicolis, I. Prigogine, Self-Organization in Nonequilibrium Systems: From Dissipative Structures to Order through Fluctuations (1977)（訳：散逸構造，岩波書店）．4 年生のときはまだ原著が入手できていなかった．M1 のときに Glansdorff と Prigogine の Thermodynamic Theory of Structure, Stability and Fluctuations (1971) の読書会を始め，途中で上掲書にスイッチした．
5) 小松左京，『継ぐのは誰か』，（ハルキ文庫）．復刊にあたり，解説を書かせていただいた．
6) H. Haken, *Synergetics*（訳：協同現象の数理）.
7) H. Fröhlich, Collective behaviour of non-linearly coupled oscillating fields with applications to biological systems. *Collective Phenomena* **1**: 101–109 (1973).
8) H. Risken, *The Fokker-Planck Equations* (Springer, 1984).
9) K. Tomita and H. Tomita, *Prog. Theor. Phys.* **51**, 1731 (1974).
10) Y. Kuramoto and T. Tsuzuki, *Prog. Theor. Phys.* **52**, 1399 (1974).
11) M. Suzuki, *Adv. Chem. Phys.* **64**, 195 (1980): この手法は非線形ランジュバン方程式を非線形変換と拡散過程という 2 つの手続きに分離して扱うことにある．後年，導入する coupled map lattice でも，意識せぬまま，カオスを生む変換と空間の拡散の 2 つの手続きを分離して行っていたことにだいぶ後になって気づいた．
12) 『カオスの紡ぐ夢の中で』(1997)．2010 年，ハヤカワ文庫により復刊．
13) K. Kaneko, *Collapse of Tori and Genesis of Chaos in Dissipative Systems*（World Sci. Pub., 1986, 1983 年の博士論文に基づく）.
14) 金子邦彦，津田一郎，『複雑系のカオス的シナリオ』（朝倉書店，1996）．改訂英語版は，*Complex Systems: Chaos and Beyond*, Springer, 2001 (K. Kaneko and I. Tsuda)
15) K. Kaneko, *Theory and Applications of Coupled Map Lattices*, edition and Chapter 1, (Wiley) 1993.
16) 『生命とは何か（第 2 版）―複雑系生命科学へ―』，東京大学出版会（2009，初版は 2003）．増補英語版は *Life, An Introduction to Complex Systems Biology* (Springer, 2006)
17) 日本物理学会誌，座談会「物理学の明日」，**56** (2001) vol 9.

（かねこ・くにひこ，東京大学大学院総合文化研究科）

特　集（2010年12月号予告）

物理における《破れ》と調和

本体952円

破れた対称性と物理世界	藤川　和男
宇宙のバリオン数とCPの破れ	諸井　健夫
標準理論におけるバリオン数の破れ	久保　治輔
超伝導における自発的対称性の破れ	上田　正仁
量子色力学におけるカイラル対称性の破れ	大野木哲也
くりこみとスケール不変性の量子的破れ	静谷　謙一
量子コヒーレンスの破れ	川畑　有郷
ローレンツ変換の破れ	佐藤　文隆
非平衡系における対称性の破れ	早川　尚男
クォークとレプトンはいつ分かれたか	川村　嘉春
［コラム］	大貫　義郎

特　集（2010年10月号）

曲面の不思議

その多彩な魅力に迫る

本体952円

曲面は現代幾何学のふるさと	森田　茂之
曲面に親しむ	逆井　卓也
代数曲線　実2次曲線から複素射影平面代数曲線へ	小木曽啓示
双曲幾何と曲面	小島　定吉
極小曲面と変分問題	宮岡　礼子
複素解析と曲面　リーマン面	志賀　啓成
特異点をもつ曲面の幾何学　ガウス・ボンネの定理と特異点	梅原　雅顕
物理学とリーマン面	細野　忍
［コラム］向き付け不可能な閉曲面	阿原　一志
［コラム］“Progress in Surface Theory”　オーバーボルファッハ研究集会	宮岡　礼子
《名著に親しむ》曲面についての本，および来し方の回想	二木　昭人
［インタビュー］曲面は数学の共通の広場	森田　茂之
《連載》　情報幾何の新展開　その1	甘利　俊一
《現象から方程式を創り出す》　第9回	神部　勉

編集後記

今回の特集は如何でしたでしょうか．

「連続」と「離散」というと，今回の記事のテーマにあるような数学の話題が思い浮かびますが，私たちの身近なところにも「離散」の考え方を用いたものがあります．

読者の中に子どもの頃に作成された人もいるかもしれませんが，「パラパラ漫画」もそういうものの一つではないでしょうか．これは結果的に連続的なアニメーションのような動きをするものですが，絵の一枚一枚は静止画ですので，連続的な現象を表すのに離散的な思考を用いていることになるのではないかと思います．アニメーションの制作現場でもこの手法が使われていて滑らかな動きをするアニメーションでは，例えば5分くらいのものでも何枚もの原画が描かれている，というような話を聞きます．

皆さんも身近な「離散的な考え方」を探してみませんか．　（R）

数　理　科　学　11月号

2010年11月1日発行

数理科学編集部　　発行人　木下敏孝
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所　©　株式会社 サイエンス社　TEL. (03) 5474–8500（代表）
〒151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600（広告部）

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁